This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

	20000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	0
1	19972	59069	50914	77475	68984	11687	88731	61181	8
2	19993	14649	95111	45600	73521	77673	53597	51899	7
3	19998	28655	14801	40694	49784	40949	09568	10715	81
4	19999	25716	33282	58404	65016	26281	79826	21895	83
5	19999	89290	80339	28781	70043	22845	28584	39443	7
6	19999	97322	69905	62344	56638	83981	94473	25217	6
7	19999	99330	67465	20595	08810	79505	66081	79690	2
8	19999	99832	66865	60149	32532	73652	05380	52267	1
9	19999	99958	16716	35662	36582	16062	91268	38427	9
10	19999	99989	54179	08642	15610	95820	6-673	32062	6
11	19999	99397	38544	77143	44931	82594	55315	31005	9
12	19999	99999	34636	19284	79422	27435	10979	12234	3
13	19999	99999	83659	04821	13179	90095	37737	33586	4
14	19999	99999	95914	76205	27877	74601	13098	64463	7
15	19999	99999	98978	69051	31943	35967	61314	84895	0
16	19999	99999	99744	67262	82984	21011	73643	70316	7
17	19999	99999	99936	16815	70745	95066	67368	11239	9
18	19999	99999	99984	04203	92686	48130	02714	35225	7
19	19999	99999	99996	01050	98171	91992	71670	60832	4
20	19999	99999	99999	00262	74542	90495	69229	65334	7
21	19999	99999	99999	75065	68635	72623	76764	41341	5
22	19999	99999	99999	93766	42158	93155	93219	66585	8
23	19999	99999	99999	98441	60539	73288	98244	20162	1
24	19999	99999	99999	99610	40134	93322	24357	25572	7
25	19999	99999	99999	99902	60033	73330	56139	07676	4
26	19999	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	75436	80
								68766	55
								17185	847
								54296	0998
								63574	00233

Cyclometricvs

Willebrordus Snellius

Digitized by Google

Et hæc

Ma. 948.

Math-948

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT

900

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

VVILLEBRORDI SNELLII R. F.

CYCLOMETRICVS,

De circuli dimenſione ſecundum Logiſtarum abacos, & ad Mechanicem accuratiſſima; atque omnium parabiliſsima.

Eiuſdemque uſus in quarumlibet adſcriptarum inventione longe elegantiſſimus, & quidem ex ratione diametri ad ſuam peripheriam data.

Monasterii S. Andreae iuxta Brugas acquisitus per R. D. Sebast. Van Berghe Priorem



Haerman

ad usum P. Philiberti 1724

LVGDVNI BATAVORVM,
Ex Officinâ ELZEVIRIANA,

ANNO CIↃ IↃ CXXI.

In V. CL.

VVILLEBRORDI SNELLII

Librum

De quadratura circuli

PETRVS CVNÆVS I. C.

Quadrationem ſcrupuloſam circuli,
Natura ferre quam poteſt, ſed abdito
Tegit receſsu, nullus edidit dies
Nec edet unquam. Tanta vis inſcitiæ
Mortale pridem damnat ac tenet genus.
Sed illa laus eſt interim pulcherrima
Huc tendere uſque, quò poteſt mens progredi.
Id primus orbi Snellius *præſtat meus,*
Inuſitatis auſibus poſtquam vias
Emenſus omnes terminum ſcientiæ
Præfixit hominum, quem prius nec adſequi
Mens ulla potuit, nec poteſt excedere.

ILLV-

Digitized by Google

ILLVSTRISSIMO PRINCIPI

MAVRICIO *Principi Auraïco, Comiti Naſſoviæ, Cattimœlibocorum, Moerſæ, Viandæ, Dietzæ, Lingæ, Buræ, Leerdami: Marchioni Veræ, Vliſsingæ: Domino & Baroni Bredæ, Gravæ, regionis Cuyck, Dieſtæ, Grimbergæ, Arlæi, Nozeroy, S. Viti, Daeſburgi, Herſtallæ, &c. Hereditario Vice-Comiti Antvverpiæ & Veſontionis: Provinciarum Fœderatarum Belgij Gubernatori, earundemq; Archiſtratego, & Architbalaſſo generali, &c.*

ILLVSTRISSIME PRINCEPS,

QVantus humano generi ſit innatus amor cognitionis & ſcientiæ, vel inde manifeſtum ſit, quod ad rerum ſubtiliſſimarum inveſtigationem hominum natura nullo emolumento invitata rapiatur: Et quemadmodum id in optima quaque indole maxime apparet; ita merito ab illo Philoſophorum Homero beatus etiam is judicatur, cui vel in ſenectute contigerit, ut ſapientiam & veras opiniones aſſequi poſſit. Natura quidem certe

animũ ſenſibus ornavit ad res percipiendas idoneis, ſed tamen eoſdem tantis difficultatibus obſepſit, ut ad verum pervidendum non tam vitæ brevitas (etſi eam quoque viri ſummi cauſentur) ſed viſorum ambiguitas & fallacia maximè impedimento ſint, & aliovorſum à vero abducant. Id cum creberrimè in rebus naturalibus uſu veniat, ut luſu naturæ vario & multiplici indagantis induſtria fruſtra ſit: idem tamen profectò ubivis in alijs artibus, vbi paullum à conſuetis abieris omnes utique experimur. Nam & illæ ipſæ artes, quæ cogitationem à ſenſibus ſubducunt, & in recondito & ſubtili mentis ſacrario tranſiguntur, quamvis cæteris puriores & minus elementari fæce contaminatæ videantur, ſuas tamen habent difficultates inexplicabiles, in quibus plurimi non tantũ oleum & operam perdunt, tanquam ſi hic ſua tirocinia ponerent: ſed nominis quoque & exiſtimationis naufragium faciunt. Et ne longius diſcedam iſta ipſa quam nunc in manibus habemus circuli quadratura argumento nobis ſit: ſcopulus inquam iſte tot naufragijs infamis; ad quem viri nominis fama & doctrina celeberrimi, tanquam in brevia & ſaxa tempeſtate quadam abrepti, miſerè adhæſerunt: quorum exiſtimationi non eo derogatum, modò ne familiam ducant. Nocet enim plurimum

mum cum falſæ rei gravis auctor extitit. Poteram equidem & ego tantorum virorum exemplis ab inſtituto deterreri; cum hac in parte, Archimede excepto, nihil cuiquam ex voto ſucceſſiſſet, nedum ut illius induſtriam quiſquam ſuperaviſſet. Sed enim dum honeſto otio me oblecto, libuit etiam hic aliquid conari, & in re ardua atque difficili ſucceſſum experiri. Et cum epichirema ipſum partim demonſtrationibus farmaviſſem, partim etiam calculi ratiocinio comprobaviſſem, laborem quoque iſta opera dignum ſumpſiſſe viſus mihi ſum. Nam & limites circuli perimetro (quod omnino palmarium videbatur) circumpoſui, & eoſdem Archimedæis non paulo arctiores conſtitui. Quam enim rationem dimetientis ad ſuam circumferentiam ille à nonagintaſexangulo aſſequitur, eandem ego inde à ſexangulo exhibeo. Quos ille ex uno ſcrupulo exhibet, iſtos ego inde in uno gradu etiam ſupero. Atque iſto in infinitum proceſſu ſemper notarum in diametro aſſumptarum ſemiſſe ipſum anteverto: quod etſi forſan meritò haud contemnendum videatur; cum nunc demum tot exactis ſeculis novi, & Archimedæis anguſtiores limites ſint inventi. Non tamen unquam me tantopere hæc ipſa res oblectaviſſet, aut inventi dulcedine deliniviſſet: niſi uſus qui inde

derivatur uberrimus & jucundiſſimus voto atque ſpei conceptæ reſpondiſſet. Ut enim mechanica factionis commoda hic omittam, illud utique haud quaquam aſpernandum exiſtimo, quod anguli dati trianguli abſque ullo triangularium canonum uſu adeò accuratè hinc explicentur, quam per ipſos canones, & perſæpe quidem haud operoſius quoque: quod præterea inſcriptæ cujuſcunque datæ peripheriæ hinc tam accuratè inveniantur, quam erit ratio diametri ad ſuam peripheriam data, aliaque quæ nunc non recenſeo. Vereor ne quibuſdam portenta loqui, & ſupra fidem dicere aliquid videar. Sed dictis fidem res ipſa faciet. Obiter tantum, Princeps Illuſtriſſime, hujus noſtri fundi utilitatem indicavi, ut ſi iſta polito limatoque tuo judicio probentur, nullius deinceps cenſuram aut notam pertimeſcant. Neque tantilla operis exilitate aut mole deterritus, ſed contra utilitate potius inſtigatus T. C. hoc conſecrare non ſum veritus. Et quidem tanto majore fiducia, & ſpe certiore: quanto omnes tot retro ſeculis, non minus belli gloria, quam mathematum divina cognitione longè antecellis. Ut, quod illi votis optaviſſe, & fabulis confictis poſt venturis perſuadere conati ſunt, id divinitus à ſupremo numine T. C. conceſſum, & cumulatè tributum videatur. Cum igitur

artes

Digitized by Google

artes iſtæ tanto in pretio apud te ſint, Princeps Illuſtriſſime, ut, ſive bellicum Mars increpuit, hæ ſemper tecum medijs in prælijs & urbium expugnationibus verſentur & pernoctent: ſive bellici animorum motus pace reddita conſederint; ad omnium utilitatem, ornatum, totiuſque reipublicæ εὐταξίαν à te verſari & tractari gaudeant. Nefas fuerit dubitare noſtram iſtam εὐφημίαν, cum ſit animi venerantis cultus, T.C. minus gratam fore. quæ, ut ab omnibus & patriæ, & veræ libertatis amantibus T.C. debetur, ita quoque noſtram.

——— Hanc ſine tempora circum
Inter victrices hederam tibi ſerpere lauros.

Quod ſummis votis obnixe contendit

Tuæ Celſitudini

addictiſſimus

VVILLEBRORDVS SNELLIVS R. F.

Lectori benevolo.

POſtquam Matheſis ex Ægypto in Græciam traiecit Pythagora & Thalete facti adeò auſpicati ducibus, confeſtim omnes Philoſophorum diatribæ mirabili tam præclaræ artis amore incenſæ flagrarunt; ut ſumma contentione novorum epichirematum inventionibus certatum ſit: Dum alij ad cœli & ſiderum motus, ſoliſque converſiones, & illa quæ in vulgus plauſum mereri, & majorem hominum vitæ opportunitatem allatura videbantur ſcrutanda animum adjiciunt: alij verò ad γραμμικὴν θεωρίαν ut iſtam vel ornarent, vel augerent, vel planiore & commodiore via demonſtratam in vulgus efferrent, incubuerunt. in quibus multa ſcitu jucunda, uſu non utilia ſolum, ſed neceſſaria quoque eruerunt. Et reliqua quidem cum bellè atque ex voto procederent, & ita maximis acceſſionibus hanc ipſam ſcientiam quotidie amplificarent, duo ſcopuli in hoc Oceano illis objecti ſunt, è quibus tanquam è vortice vix, ac nè vix quidem quiſquam ſine nominis atque exiſtimationis ſuæ jactura explicare ſe potuit, ubi ſemel horum cupiditate implicati & amore irretiti iſtis adhæſerant. Cubi inquam duplicatio, & circuli quadratura. Sed illa tamen aliquouſque proceſſit, & quam per naturam potuit à ſummus viris lu-

cem

Digitized by Google

cem accepit; iſtius autem inveſtigatio & publicatio adeò infortunata ſuis auctoribus accidit, ut lepidiſſimus Comicus ſub Metonis nomine hanc traducere, atque eandem à ſubtiliſſima Geometrica theoria, ad infimum mechanicæ epharmoſeos ſubſellium & pragmatiam detrudere non ſit veritus, his verbis:

Ὀρθῷ μετρήσω κανόνι, προστιθεὶς, ἵνα
Ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος.

Atque ita nobiliſſimum problema comico proſcenio ludibrium debuit, ob infelices multorum ψευδογραφίας, *qui ſuæ exiſtimationis naufragium hic fecerunt; dum alia atque alia via ad ejus inveſtigationem involare conantur. Eodem enim fere tempore hanc incudem tuditarunt Bryſo, Antipho, Hippocrates Chius, Dinoſtratus Eudoxi auditor. Menechmi frater; & alij præterea innumerabiles, quorum nomina & infelices conatus ipſa longinqui temporis vetuſtas obliteravit, quos Conon Hamæus & inde Archimedes, hoſque ſecuti Appolonius Pergæus, Philo Gaditanus & Claudius Ptolomæus exceperunt. Neque ullo adeò ſeculo ab hujus rei inquiſitione temperatum. Arabes quoque huc curam ſuam verterunt; & res eadem patrum ac noſtra memoria plurimos exercuit. Libet igitur majoris evidentiæ cauſa pſeudographiam à veritate diſpungere, & eos qui regia graſſati ſunt via, ab illis qui in diverticulo oberraverunt ſegregare, ut noſtri laboris utilitas iſta comparatione clarius*

rius eluceſcat. Atque ideo rem ipſam altius paulo arceſſere fuerit operæ pretium.

Veteres illi οἱ εἰς τὸ ἄκρον ταύτης τῆς παιδείας ἐληλακότες *Geometricorum problematum materiem prout ſolutioni apta eſſet & accommodata, ita trifariam diſtinxerunt, in plana, ſolida & linearia. Ad Plana enim ea omnia referebant quæ linearum rectarum ductu, aut circuli circumferentia explicantur: cujuſmodi ſunt ea, quæ primis elementis, aut inde eâdem ſerie derivatâ factione expediuntur, hoc eſt, quæ à conſtituta* στοιχείων *per circinum & regulam ſuum effectum ſortiuntur. Nam & recta & circulus in plano, tanquam in ſuo genuino ſolo primum deſignantur. Secundum autem genus quod ſolidum vocant, illam ſolidorum doctrinam requirit, quam Plato primus attigiſſe putatur: certè etus difficultatem, & obſcuritatem non ſemel inculcat, ejuſque rationes minus explicatas in libris de republica quiritatur,* ὅτι οὐδεμία πόλις ἐντίμως αὐτὰ ἔχει, ἀσθενῶς τε ζητεῖται, χαλεπὰ ὄντα. *Nec enim à quoquam niſi ſecretioribus mathematum ſacris initiato pervideri aut intelligi queunt. Et enim ideò plus habent difficultatis, quod effectum ſuum ſortiantur à lineis è corporum ſolidorum, utpote coni & cylindri ſectione ortis: unde & lineæ ſolidæ vocantur, quæ inſtigante primùm Platone, certatim poſtea & magno ſtudio à viris ſummis excultæ fuerunt. Tertium verò & ultimum genus tum demum adhiberi & frequentari ſolet, cum ex antecedentibus*

locis

locis ad propoſiti ſolutionem nihil afferri poterit, aut explicatio nimis operoſa, & minus erit catholica. Nam hic lineæ aſſumuntur, quæ non quidem ex ulla corporum ſectione, ſed ex duarum linearum in una ſuperficie ſeſe interſecantium motu & communis ſectionis veſtigio delineantur. Prout autem horum motuum erunt variæ & intricatæ leges, & ipſæ præterea ſuperficies variæ, ita varietas harum & perplexa deſignatio multiplex erit & varia; qua in re multi veterum ingenium ſuum potius oſtentarunt, quam ut hinc uſum ullum oportunum etiam ſummo conatu exprimere potuerint. Credo ad harum contemplationem ab ipſa natura invitatos, quæ iſtiuſmodi helicibus ubique ludit, etiam ſuas curas & cogitationes huc vertiſſe. Inde, opinor, factum, ut illi qui circulum ἐπιστημονικῶς quadrare animum induxiſſent, cum viderent nullum hic locum proportioni eſſe aut ſimilitudini: alij ad ἐφάρμωσιν, alij ad τεμαχισμὸν, alij denique ad helicas confugerent. Eſt enim ἐφάρμωσις luculentiſſimum Geometricæ ſuppellectilis inſtrumentum, ſuis tamen limitibus diligentiſſimè coërcenda, ne quo à veritate abeat diverſa lubrica enim eſt, atque hos qui ipſa violenter utuntur, aut fidentur abutuntur in profundiſſimum errorum barathrum agit præcipites. Et quia mente ſola conſtant hæc ſacra, contra eos, qui rebus phyſicis atque corporeis eam admiſcent merito dicam inſtitueret Divinus Plato; quippe τῆς γεωμετρίας οὕτως ἀπὸ τῶν ἀσωμάτων καὶ νοητῶν ἀποδιδρασκούσης

ἐπὶ τὰ αἰσθητὰ, cum Geometria hoc pacto à rebus incorporeis, & nudis animi conceptibus nimiũ impurè ad ſenſuum arbitrium traducatur. Talis utique eſt mechanica circuli cujuſque revolutio, donec ad idem peripheriæ punctum recurrat, unde circumduci occeperat; quæ illud quidem arguit, & tanquam ob oculos ponit, rectam aliquam lineam circuli perimetro revera æqualem exhiberi poſſe, εἶναι γὰρ τινὰ τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ πρὸς οὐδενὸς ἔστι ζητούμενον, ait Eutocius. At quiſnam ideo quæſo ex iſta revolutione æqualitatem definiet? quis circulum tanquam Syſiphi aliquod ſaxum volvet & revolvet, ut ex opere mechanico Geometricam & ἀποδεικτικὴν veritatem eruat? niſi qui incertior multò velit eſſe, quam fuerat dudum, & ſui nominis atque exiſtimationis ſuæ ſit omnino prodigus. Quamobrem etſi illud jam inde abinitio haud difficulter eſſet notatum & animadverſum, circulum æquari triangulo, cujus baſis peripheriæ, altitudo autem eiuſdem radio eſſet æqualis; omnes huc ſuam curam ſtudiumque verterunt, ut rectam lineam cum circuli circumferentia paria facientẽ nobis exhiberent: ita enim rectilineum ejuſdem areæ æquale dari poſſe nemo dubitabat. Cumque hac mechanica revolutione nihilum ad iſtam æqualitatem profici apud ſaniores conſtaret, ideo altius omnia ſibi repetenda cenſuerunt. Feſtivi enim & lepidi illi homines, qui ad hanc revolutionem perpetuò provocant, profectò de cœno hauriunt, neque plus operæ aut induſtriæ

huc

huc contulerunt, quam aurigæ aut ciſarij ſolent, qui aſſiduò ambitum rotarum ſubjectæ orbitæ ἐφαρμώζουσι; & istorum profanitas à ſacratiſſimis Geometriæ adytis longiſſimè est arcenda. Cum, inquam, ludicrum istud nimis lubricum viris perſpicacibus videretur; ideò postquam hac non ſuccederet alia ſibi via tentandum rati, ut rectilineum dato circulo exhiberent æquale. Bryſo quidem aſſumpto quadrato inter inſcriptum & circumſcriptum quadratum proportione medio. Atqui istud octangulo in eundem circulum inſcripto æquatur, & ideo circulo dato minus est. Quia inter figuras ordinatas & ſimiles eidem circulo adſcriptas, inſcripta duplo laterum numero media proportionalis eſt. *Ita hic conatus in ipſa (quod ajunt) herba oppreſſus, postea in manifestiorem τετραγωνισμὸν erupit. Et hic alij quidem è perpetua peripheriarum biſectione, tanquam minutali aliquo rectam dato circulo bene Geometricè æqualem exhiberi ſunt arbitrati. Hoc enim Antipho ſecutus est, qui hac continuata ſectione eò putavit perveniri, ut ſegmentum noviſſimum ſuæ ſubtenſæ tandem æquaretur. Sed hujus alogistiæ & ψευδαρίῳ poſtmodũ à Leontio, Theudio & veteribus στοιχειώταις oppoſitus eſt murus aheneus, theorema illud longe elegantiſſimum,* Rectam quamcumque duo quælibet peripheriæ puncta connectentem cadere intra circulum. *In eo igitur haud leviter hallucinatus, quod τὸ συνεγγὺς vero proximum pro ipſo vero aßumpſerit; cætera haud*

omnino

omnino aſpernandus: Nam alijs occaſionem præbuit hunc τεμαχισμὸν ita temperandi, ut inde figurarum adſcriptionem intra & extra circulum huic fini oportunam adhiberent; ut hoc ſaltem pacto fugacem & labilem rotundi naturam intra hos limites coërcerent concluderentque, quod primus fecit, certè omnium primus prodidit ἀστὴρ ἀείζηλος, ocellus ille, & Mathematum deliciæ Archimedes Syracuſanus. Cum enim ad accuratam peripheriæ inventionem nulla eſſent è proportione aut ſimilitudine veſtigia in promptu, & tamen nihilominus conſtaret circuli circumferentiam inter inſcripti & circumſcripti polygoni ambitum quantitate eſſe intermediam, docuit qua ratione inſcribi poſſet polygonum quantumlibet continuata biſectione, & præterea circumſcribi: atque ita inter horum laterum magnitudines peripheriam circuli, tanquam circumpoſitis limitibus, circumſcripſit: non autem definivit mediam, ut perperam Bryſo; neque ſubtenſas inſcriptis æquari, ut Antipho. Hanc itaque viam quicumque ſequitur nuſquam à veritate deflectet. Et propterea iſtam quadraturam limatiſſime olim expoliverunt, atque ſubtiliſſimo epilogiſmo ad multas myriadum myriadas produxerunt. Magnus ille Apollonius Pergæus & Philo Gaditanus, è recentioribus etiã viri ſummi Franciſcus Vieta & Adrianus Romanus, *quorum omnium accuratam diligentiam longe ſuperavit* Ludolphus *à* Ceulen, *logiſta ſubtilis. Quamobrem Archimedæa ratio non à ſolis*

nume-

numeris, ſed etiam geometricis demonſtrationum monimibus bene accuratè adverſus omnes inſultus munita, ab omni antiquitate approbata, laudata & expreſſa eſt. Hic igitur Lydius verè lapis, & regula Leſbia eſto, ad quam omnium inventa ſint exigenda: ut quantum ab hoc examine abludunt, tantundem eoſdem à veritate diverſos abire certum ſit. Eamque adeò vel ſolam ob cauſam, novos iſtos quadratores perpetuò ſibi habuit infeſtos. Cum enim à vero longe abirent diverſi, & ideo quoque cum iſto ſibi minus convenire cernerent, hos tot retro ſeculis rei Quadratariæ ſacros limites convellere conati ſunt, ut nullis repagulis coërciti vago curſu & lapſante veſtigio impunè oberrare poſſent. Et tum demum ſe triumphare crederent, cum, θεσπεσίῳ Archimedi obloquerentur aut maledicerent, cujus inventum tamen à quoquam temeraria audacia ſollicitari aut convelli nequaquam eſt ferendum. Atque iſta prima eſt claſſis epichirematum quibus circuli quadratura per regulam & circinum tentata eſt. Porrò ſolidum hoc problema à quoquam veterum judicatum, aut ita tentatum nuſquam me legere commemini: niſi forſan hoc divino Archimedi venerit in mentem cum circulo ellipſin comparavit. Sed id potius ad ellipſis quadrationem, quam ipſius circuli referendum videatur. Veruntamen cum nihilominus Geometricas ſpeculationes ad hoc genus ſatis virium habere crederent, inde ſe ad helicas & earum motus contulerunt, quarum contem-

platio etſi minus difficilis ſit, earum tamen effectio non perinde expedita eſt & facilis. Helicum autem ad diverſos uſus diverſa ſunt excogitata genera, qua de re ſingulares & eruditi libri olim extabant, quos ætas obliteravit. Nam Demetrius Alexandrinus ſcripſerat περὶ γραμμικῶν ἐπιστάσεων. *Philo Tyanæus* περὶ πληκτροειδῶν: *inter quas Menelao Geometræ una viſa erat peculiari digna tractatu, quæ ob ſtupendas & incredibiles affectiones eidem admiranda vocatur. Neque tamen in ſola ſuperficie plana iſtæ omnes deſcribuntur; ſed aliæ in ſphærica, conica, cylindracea, aliæ etiam in alijs ſuperficiebus delineantur. Verum ex his cylindracea, ob illuſtrem quoque ejus in mechanicis machinationibus uſum, ſingularibus libris à Gemino & Apollonio fuit explicata. Huc aggregandæ ſunt* κισσοειδεῖς κογχοειδεῖς, *aliæque præterea infinitæ. Sed quæ ad circuli affectiones explicandas conducant, duæ maximè celebrantur,* τετραγωνίζουσα *quadrataria delumbata, &* τεταγμένη *ordinata. Illius inventio Dinoſtrato tribuitur, is inquam volutam hanc delumbatam primus excogitavit, quam Nicomedes & Hippias deinde excoluerunt. Eſt autem iſtius Geneſis reliquarum haud diſſimilis, quæ omnes gemini motus concurſu fere diſcribuntur. Si enim concipias rectam circulum contingentem radio jacenti parallelam, motu* ὁμαλῷ *& parallelo ſitu ad hunc radium deſcendere eodem temporis ſpatio & pari velocitate, quo radius alter à contactu circuli quadrantem*

per-

percurrit; utriuſque hujus lineæ communis ſectio helicem lienam deſcribet, cujus terminus tamen ad radium ſubjectum pertingere non poteſt, quia iſtic hactenus ſe ſecantes lineæ mutuo ſibi congruunt: ut ita punctum illud, & quadratariæ limes quæſitus ante evaneſcat, quam exiſtat. Quod ſi tamen is hoc imaginario motu deſignari poſſet, tum abſumptum hoc radij ſegmentum; radius ipſe & quadrans peripheriæ eſſent continuè proportionales. Atque ideo hinc jam recta datæ peripheriæ æqualis, aliaque id genus compluria præſtari poſſent, quemadmodum Pappus συναγωγῆς μαθηματικῆς *libro 3. demonſtravit. Veruntamen, ut dixi, huius volutæ verum limitem inveniri poſſe veriſſimè iam tum negabat Sporus Nicenus, quia tandem radius ille motus & parallela deſcendens, cum radio jacente omnino congruunt. Atque ita in extremo termino, quo maxime fuerat opus, ſectio omnis evaneſcit. Hæc igitur linea ad juſtæ quadraturæ factionem omnino fuerit inutilis: quamvis eadem in numeris ſuam dignitatem quoque tueatur. Eam ob cauſam Conon Hamæus Archimedis æqualis & ab eodem laudatus, aliam excogitavit volutam ordinatam per æqualia radij ſpatia æqualiter excreſcentem, cujus latentes & occultas affectiones mirabili ingenio explicavit Archimedes, inde obliterata inventoris memoria Archimedea vocatur. Verum utraque ad operis exegeſin adeò eſt intricata, ut ſatius fuerit & certius circulum* μηχανικῶς *revolvere, quam iſtas heli-*

cas

Digitized by Google

cas machinari. Quæcunque enim motu imaginario in mathematicis conſtruuntur, arguunt illa quidem ſui inventoris ἀγχίνοιαν; ſed quia ἀΰλως concipiuntur, neque per regulam & circinum effectum ſum ſortiuntur, quanto ſubtiliorà tanto ab uſu communi ſunt remotiora. Qui vero his delineandis novum ſyrma inducunt, atquè per puncta diſpoſita iſtas delineant, idque Geometrice, ut ipſi de ſe prædicant, nimis audacter faciunt. At cum eam delineationem cum conicis ſectionibus conferunt, audaciæ etiam impudentiam addunt, & nimium ſecure in veterum ſcriptis verſati umbras rerum non res ipſas æſtimarunt. Nam illud quidem genus ſemper poſtremum eſt habitum, ut re deſperata ad γραμμικὰς ἐπιστάσεις, tanquam ſacram anchoram confugerent. Cum enim neque per plana, neque per ſolida quæſiti ſolutionem legitimam aſſequi poſſent, tum iſtis demum locus erat, tanquam re omnibus modis deſperata. Poſt Archimedem nemo novo epichiremate hanc rem ἐπιστημονικῶς explicavit; etſi enim multi hanc incudem tuditarint, eorum tamẽ induſtria in hoc pulvere minus feliciter eſt verſata. Quorum nomina, ob honeſtos conatus, ſilentio tranſmitti ſatius ſit, quam publicando eorundem exiſtimationi quidquam derogare. Cum multi eorum de literis & hoc ipſo pulvere aliquando bene ſint meriti.

Quamobrem tanto demum intervallo Archimedem ſecuti primi nos limites novos hic præfiximus, intra quos circularis

cularis

cularis peripheriæ modulus ſtaret; ſed non paulo arctiores Archimedeis. Cum eoſdem terminos jam à ſexangulo exhibeamus, quos ille vix in nonaginta ſexangulo poſt quartam biſectionem aſſequatur. Quin adeo ex illo ipſo 96 angulo mihi naſcitur ratio diametri ad peripheriã, quæ 10000000 *ad* 31415926 *minor, &* 31415927 *maior vera; unde Archimedis abacus vix ſummo conatu expreſſerit rationem* 7 *ad* 22, *hoc eſt* 1000 *ad* 3142: *ſed hæc in ipſo opere fuſius à nobis ſunt expoſita. Quod etſi non leve forſan videatur: tamen neque illa contemnenda exiſtimo, quod ſecundum geometricam factionem cuicumque datæ lineæ peripheriam, aut contra cuicumque peripheriæ rectam lineam æqualem expeditiſſime exhibere liceat. Hac igitur re omnium factionibus noſtrum epichirema anteferendum ſit: cum hinc inſuper mirifica ſcitiſſimorum problematum ubertas exiſtat. Verum iſta mihi hic palmaria videntur, quod cuicunque angulo aut peripheriæ ſinum debitũ exhibere nobis haud operoſe liceat, & quidem ex data ratione peripheriæ ad ſuam diametrum. Quæ res quanti ſit momenti haud exiſtimo ignotum eſſe iis poſſe, qui unquam ad triangularium Canonum compoſitionem ſeriò manum admoverunt. Nunc autem aliquem è media turba ſinum eligere tibi licet, & eiuſdem integritatem abſque ambagibus explorare. Quod cuivis invento contra comparandum credo futuros qui contendant. Nam & hinc tangentium atque ſecantium lubricitati facile cenſura,*

&

& manus medicæ admoveri poſſunt abſque longa περιεργείᾳ. Ad extremum, quam facile è dabus trianguli rectanguli lateribus, neglectis tabulis, angulorum quantitas inveneatur, vix dici poſſet, niſi rem ipſam auctorem daremus. Sed cum plura ſint hujus generis illò lectorem ſtudioſum remittere ſatius exiſtimo, ne ſingula verbosè inculcando te diutius morer. Quamobrem etſi initio huius editionem non nimis maturare inſtituiſſem, cum tamen cernerem plurimos, infelices ſuos conatus huic eriduto ſeculo, abſque ullo uſu commodo, etiamſi id quod conabantur effeciſſent, obtrudere: non putaui æquum eſſe me, ſi quid felicius paulò hic expreſſiſſem, id publico diutius debere. Quin potius epichirema noſtrum, non minus utilitate ſua, quam inventi novitate commendatum, in publicam lucem exire paſſus ſum. Vale.

ERRATA.

Pagina 1. verſu 5. radium, lege radio. p.4.v.32.complementum, d. p.5.v.11. quinquies, l.quater. p.7.v.21.ex l.&. p.9.v.3.viciſſimus, l viceſimus. p.13.v.19. im, l.im. v.25.gradium, l.graduum. v.28.pla ſinus, l.pla dimidij. p.14.v.ſunt o, l.ſunto. p.22.v.28.& exceſſus, l.exceſſu. p.23.v.recta linea, l.magnitudo. v.28. major, l.minor. p.25.v.6.major, l minor. p.27.v.29. pars culi, l.ſit circulus ipſe & pars. p.28.v.1.re, d. p.29.v.15.hic, l.hoc. v.30.mutatis, l.unitatis. p.43.v.11. faciat, d. p.44.v.15.*ar*, l.*ay*. p.45.v.2. metu, l.motu. v.13.æquare, l.quare. p.46. v.20. eandem, l.eadem. p.78.v.28.proportionis, l.proportione. p.81.v.19. percetur, l.peccetur. Interpunctionum redundantium, aut defectum ipſe per te facile aut ſupplebis aut tolles.

WIL-

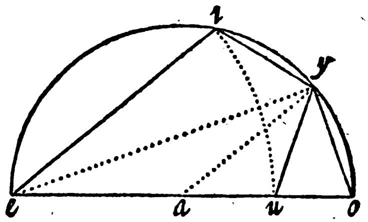
VVILLEBRORDI SNELLII

CYCLOMETRICVS

PROPOSITIO I.

Rectangulum ſub inſcriptæ à diametro differentia & radium comprehenſum, æquatur quadrato inſcriptæ dimidii complementi ad ſemicirculum.

E Ptolomei magni operis L. 1. cap. 6. ad inſcriptarum compendioſam biſectionem oportunum. Ut ſi in expoſitum ſemicirculum *ei-yo* inſcripta ſit *ei*, cui æqualis ponatur *eu*, & biſecetur reliqua periphería *io* in *y*. Ajo rectangulum ex radio *ao* & reliquo ſegmento *ou* æquari quadrato ipſius *oy*, quæ dimidio complemento eſt inſcripta. Iungatur enim inſcripta *ey*, & radius *ay*. hic anguli *iey uey* per fabricam æquicruri & æqua-



& æqualibus peripheriis inſiſtentes efficient baſes *iy yu* inter ſe æquales. ſed *iy yo* quoque æquantur: triangulum igitur *uyo* æquicrum; & quia cum triangulo *yao* ęquicruro communem habeat angulum ad *o*, eidem quoque erit ſimile. atque ideo latera *ao oy ou* circa eundem angulum proportionalia. quadratumque igitur à media *oy* æquatur rectangulo ſub radio *ao* & dicta differentia *ou* comprehenſo.

Atque ita facile dato latere trianguli æquilateri dabitur latus dodecanguli, quæ eſt dimidium complementi ejus à ſemicirculo. Vt poſita diametro 2 latus trianguli æquilateri potens triplum circularis radii erit $\surd 3$, id de diametro deductum relinquet $2 - \surd 3$, qui numerus per radium, multiplicatus tantundẽ facit $2 - \surd 3$ pro quadrato lateris dodecanguli, cujus radix $\surd .2 - \surd 3$ ipſiſſimum dodecanguli latus ad hunc radium exhibebit. Idem in numeris abſolutis, hoc modo, latus trianguli æquilateri eſt $1 \frac{7320508}{10000000}$ id de diametro deductum relinquit $\frac{2679492}{10000000}$, numerus iſte per radium, qui hic unitas multiplicatus nihil demutat: Radix ex eo numero eruenda erit latus optatum dodecanguli. quod ut ad totidem milleſimas redeat, erunt tam nomini quam numero ſeptem nullę poſtponendæ, quot initio ſunt adhibitæ. & dabitur latus. $\frac{5176380}{10000000}$. Hinc ad latus quatuor & vigintanguli, opus eſſet complemento dodecanguli. atque ita porrò in infinitum analogia conſimili. Atqui cum polygoni latus aliquod poſtulabitur in quo ſæpiculè eſſet biſecandum & complementa laterum inventorum indaganda, haud inſolens foret in tanta operis varietate & complementorum reciprocatione

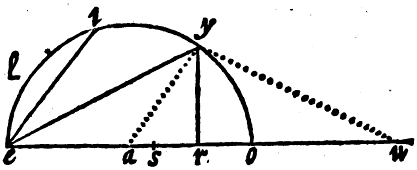
aliquem

aliquem invitum in errorem abduci. Eam ob cauſam hoc theorema ad biſectarum peripheriarum complementa continuè inveniendum haud inutile fore exiſtimavi.

PROPOSITIO II.

Rectangulum ſub recta à diametro plus inſcripta & radio comprehenſum æquatur quadrato inſcriptæ quæ & datam & dimidium ejus complementum ad ſemicirculum ſimul ſubtendit.

DAta eſto peripheria *eli* cujus ſubtenſa *ei*, eique æqualis diametro adjiciatur *ou*. & biſecetur *io* complementum ejus in *y*. Ajo rectangulum ſub tota *eu* & radio *ea* comprehenſum æquari quadrato inſcriptæ *ey*, quæ datam peripheriam *eli* & *iy* dimidium complementi ejus ſimul ſubtendit. ſit enim ipſi *ei* æqualis *es*. conſtat itaque ex theoremate antecedente *sy oy* rectas inter ſe æquales: atque ideò *yr* perpendicularem biſecare lineam *os*. totaſque ideò *er ru* inter ſe æquari. & propterea *ey yu* angulorum rectorum ſubtenſas æquales eſſe. Triangula igitur æquicrura *uye eay* communem habentia augulum ad *e* erunt ſimilia, & eam ob cauſam latera *ue ey ea* circa eundem angulum proportionalia. quadratum igitur mediæ *ey* æquatur rectangulo extremarum *ue* in *ea*. quod demonſtraſſe oportuit.



Atque hinc adeò nullo negotio invenies complementum quodlibet optatæ biſectionis. Ut ſi quæram comple-

mentum octo & quadragintanguli; facto itaque à triangulo initio, addito latus trianguli æquilateri $\surd 3$ ad diametrum 2 totus erit $2+\surd 3$, qui per radium 1 multiplicatus nihil demutat, ejus igitur latus $\surd.\,2+\surd 3$ pro recta inſcripta quæ ſubtendit $\frac{1}{3}$ peripheriæ & inſuper reliqui ad ſemicirculum complementi dimidium, quæ eſt $\frac{1}{12}$. hoc eſt, quæ ſubtendit: $\frac{1}{12}$ totius circuli. id autem eſt complementum lateris dodecanguli. iterum eodem modo dabitur $\surd.\,2+\surd.\,2+\surd 3$. Complementum quatuor & vigintanguli. & $\surd.\,2+\surd.\,2+\surd.\,2+\surd 3$ complementum octo & quadragintanguli. atque ita porrò in infinitū. Quod ſi itaque nunc hinc poſtules latus ſex & nonagintanguli, iſte inventus numerus per antecedens theorema de diametro deductus dabit tibi $2-\surd.\,2+\surd.\,2+\surd.\,2+\surd 3$ pro quadrato dicti lateris, cujus radix ipſum latus exprimet $\surd.\,2-\surd.\,2+\surd.\,2+\surd.\,2+\surd 3$. Hic modus utiliſſimus eſt in iſtis notis, ut tanquam cynoſura operis tui formulam dirigat, ne te in tanto extractionum labyrinto à vero tramite incautum abducat. Atque vel hinc magna ſurdorum numerorum utilitas liquere poſſit. Neque id eò dico tanquam eundem tramitem continuata numerorum analyſi uſurpare haud liceat. nam hoc eſſet in clara luce errare. ſed quod ita facilius & planius trames tuus ante oculos expreſſus videatur. Verum exemplo hujus theorematis utilitatem quoque comprobare fuerit operæ pretium. Ut ſi poſtuletur complementum polygoni quatuor & quadraginta biſectionibus à latere quadrati continuati, id verò polygonum eſſet 70368744177664 laterum. cum itaque latus quadrati ſit $\surd 2$, per hoc ipſum theorema dabitur complementum inſcripti octanguli $\surd.\,2+\surd 2$, & ſedecanguli complementum $\surd.\,2+\surd.\,2+\surd 2$, inde duo & trigintanguli complementum

complemen-

complementum √.2 + √.2 + √.2 + √2 hinc quatuor & ſexagintanguli complementum √.2 + √.2 + √.2 + √.2 + √2 atque ita porro quater & quadraginta continuando in venies complementum polygoni dicti √.2 + √2 ubi 2 ab ultimo √ 2 quinquies & quadragies antecedentibus ſemper univerſitatis ſigno nectitur. horum itaque hæc eſt vis & poteſtas ut primum è noviſſimo quadrato 2 latus ad quotlibet milleſimas eruatur, ut puta ad 5, 10 aut quotlibet notas: hic ſi quinque tantum uſurpemus latus eſſet $1\frac{41421}{100000}$. ut inde porrò progrediaris numerus iſte inventus ad binarium antecedentem addatur, atque è ſumma ex utroque conflata, iterum latus ut ante erutum dabit $1\frac{84776}{100000}$. qui numerus exprimit valorem √.2 + √2 ſive complementi lateris octanguli ad ſemicirculũ. Atq; id ita continue per antecedentes characteres iterando tandẽ numeri ſub his notarum griphis & involucris reconditũ valorem explicabis. Ego ſyllabum ſubjicio in quo ad lateris æſtimationem eruendam adhibitæ ſunt quatuor & quinquaginta circuli: ubi ideò ſingulæ inſcriptę exhibentur ad taxationem diametri 20000,00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 0000.

	20000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000
1	14142	13562	37309	50488	01688	72420	96980	78569	67187	53769	4807
2	18477	59065	02257	35122	56366	37879	35765	73644	83325	17272	8497
3	19615	70560	80646	08982	52364	47226	84780	73947	86746	17866	7219
4	19903	69453	34439	37724	89673	90621	89598	43150	94973	74597	1412
5	19975	90912	41034	47854	29543	20951	82013	88886	40722	94092	2373
6	19993	97637	39240	84402	31531	21933	23443	93700	12216	25154	5928
7	19998	49403	67328	90818	43292	18239	27664	48701	21293	76044	3566
8	19999	62350	56520	22853	13980	37545	71354	32347	83450	18886	7018
9	19999	90587	61915	38430	23160	25140	02397	99105	97526	72443	75308
10	19999	97646	20340	38198	58051	42034	30520	38096	53584	57795	30078
11	19999	99411	72576	43383	20456	43547	75313	54232	52779	86986	03203
12	19999	99852	93143	57022	89462	96141	47757	13896	40231	13778	45532
13	19999	99963	23285	85876	16693	83080	58194	29010	15210	24855	60705
14	19999	99990	80821	46257	81943	86627	92122	97917	78860	63789	05647
15	19999	99997	70205	36551	25346	61558	91082	16801	07483	23885	64246
16	19999	99999	42551	34136	98827	94443	72835	52178	17891	58365	70505
17	19999	99999	85637	83534	19550	19176	77009	80510	96066	62190	31603
18	19999	99999	96409	45883	54565	24829	55682	14759	27837	49925	51601
19	19999	99999	99102	36470	88621	76834	59946	48880	02923	29306	28122
20	19999	99999	99775	59117	72154	03310	35050	73007	69844	38210	45219
21	19999	99999	99943	89779	43038	42958	94391	68904	03601	90000	60424
22	19999	99999	99985	97444	85759	60247	94574	73516	42108	62934	67729
23	19999	99999	99999	49361	21439	90031	24954	73459	75063	78970	30419
24	19999	99999	99999	2340	30359	97505	89133	12432	47791	06699	11536
25	19999	99999	99999	78085	07589	99376	35276	68362	34074	20515	87894
26	19999	99999	99999	94521	26897	49844	08068	75856	47401	45163	47312
27	19999	99999	99999	98630	31724	37461	01970	28886	98655	54414	81278
28	19999	99999	99999	99657	57931	09365	25489	6409	12589	20986	39953
29	19999	99999	99999	99914	39482	77341	31372	22702	36763	52051	762
30	19999	99999	99999	99978	59870	69335	28430	45305	53556	79597	4925
31	19999	99999	99999	99994	64676	73338	32107	60610	73491	55574	1355
32	19999	99999	99999	99998	66241	91833	45802	69010	79556	67862	32066
33	19999	99999	99999	99999	66560	47958	36450	67252	41934	13151	39062
34	19999	99999	99999	99999	91640	11989	59112	66813	08736	34299	46077
35	19999	99999	99999	99999	97910	02997	39778	16703	27074	88638	09101
36	19999	99999	99999	99999	99477	50749	34944	54175	81761	89663	47436
37	19999	99999	99999	99999	69869	37687	33736	13543	95440	04759	86557
38	19999	99999	99999	99999	99967	34421	83434	03385	98859	98523	96620
39	19999	99999	99999	99999	99991	83605	45858	50846	49714	99464	36654
40	19999	99999	99999	99999	99997	95901	36464	62711	62428	74851	67757
41	19999	99999	99999	99999	99999	48975	34116	15677	90607	18713	26851
42	19999	99999	99999	99999	90999	87243	83529	03919	47651	79678	27644
43	19996	99999	99999	99999	99999	96810	95882	25979	86912	94919	56656
44	19999	99999	99999	99999	99999	99202	73970	56494	96728	23729	89148
45	19999	99999	99999	99999	99999	99800	68492	64123	74182	05932	47286
46	19999	99999	99999	99999	99999	99950	17123	16030	93545	51483	11821

Digitized by Google

Quod ſi ex hujus canonis numeris aliquod polygonum expetas, ubicunque tibi collibitum erit opus inſtitues. Ut ſi quæram latus polygoni cujus complementum ſit numerus in hoc ſyllabo nonus & viceſimus, quod eſt latus polygoni 1073741824. Ad eam rem numerus ſyllabi octavus & viceſimus tibi erit adhibendus, namque ſi hujus à diametro differentia 34242068906347451035908074107901-360047 per radium multiplicetur, facti latus quadratum 585167231706863871585646093813791804 126020 erit dicti polygoni latus optatum: ubi tamen noviſſimæ ſex & ſequentes ſi continuentur notæ omnino à veris ſunt alienæ, cum in differentia ſupraſcripta duntaxat octo & triginta notæ accuratæ & ſignificantes dentur, quarum ultima lubrica eſt, & tantum veræ proxima. ut latus dicti polygoni detur 5851672317068638715856460938137911 8041 duntaxat & proximè minus vero, ad taxationem radii particularum 100000, 00000,00000,00000,00000, 00000,00000, 00000, 00000, 00000,

Libet etiam alterum ſyllabum à ſexagintanguli complemento tricies continuatum huc adſcribere latus ſexagintanguli in numeris ſurdis ex inexplicabilibus datur $\surd.2 - \surd\frac{15}{16} - \surd\frac{3}{16} - \surd.\frac{5}{8} - \surd\frac{5}{64}$. Vel etiam $\surd.2 - \surd.1\frac{3}{4} + \surd\frac{5}{16} + \surd.1\frac{7}{8} + \surd\frac{45}{64}$. Hos enim numeros inter ſe pariare quantumvis diverſi videantur, res ipſa & analyſis docet. hujus complementum itaque eſto $\surd.2 + \surd.1\frac{3}{4} + \surd\frac{5}{16} + \surd.1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$. quare biſectione complementorum novies & vicies continuata dabitur $\surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 +$
$\surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 +$
$\surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 +$
$\surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 +$
$\surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.1\frac{3}{4} + \surd.\frac{5}{16} - \surd.1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$
complementum polygoni 3221225472 0 laterum.

Syllabus

Syllabus complementorum ad ſemicirculum initio facto à complemento inſcripti ſexagintanguli quantarum diameter erit.

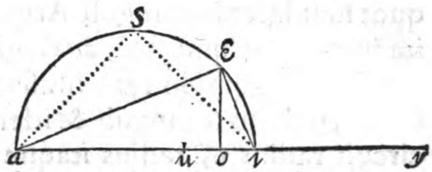
	20000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	0
1	19972	59069	50914	77475	68984	11687	88731	61181	8
2	19993	14649	95111	45600	73521	77673	53597	51899	7
3	19998	28655	14801	40694	49784	40949	09568	10715	81
4	19999	25716	33282	58404	65016	26281	79826	21895	83
5	19999	89290	80339	28781	70043	22845	28584	39443	7
6	19999	97322	69905	62[illegible]44	56638	83981	94473	25217	6
7	19999	99330	67465	20595	08810	79505	66081	79690	2
8	19999	99832	66865	60149	32532	73652	05380	52267	1
9	19999	99958	16716	35662	36582	16062	91268	38427	9
10	19999	99989	54179	08642	15610	95820	62673	32062	6
11	19999	99997	38544	77143	44931	82594	55315	31005	9
12	19999	99999	34636	19284	79422	27435	10979	12234	3
13	19999	99999	83659	04821	13179	90095	37737	33586	4
14	19999	99999	95914	76205	27877	74601	13098	64463	7
15	19999	99999	98978	69051	31943	35967	61314	84895	0
16	19999	99999	99744	67262	82984	21011	73643	70316	7
17	19999	99999	99936	16815	70745	95066	67368	11239	9
18	19999	99999	99984	04203	92686	48130	02714	35225	7
19	19999	99999	99996	01050	98171	91992	71670	60832	4
20	19999	99999	99999	00262	74542	90495	69229	65334	7
21	19999	99999	99999	75065	68635	72623	76764	41341	5
22	19999	99999	99999	93766	42158	93155	93219	66585	8
23	19999	99999	99999	98441	60539	73288	98244	20162	1
24	19999	99999	99999	99610	40134	93322	24357	25572	7
25	19999	99999	99999	99902	60033	73330	56139	07676	4
26	19999	99999	99999	99975	65008	43332	64034	75436	80
27	19999	99999	99999	99993	91252	10833	16008	68766	55
28	19999	99999	99999	99998	47813	02708	29002	17185	847
29	19999	99999	99999	99999	61953	25677	07250	54296	0998
30	19999	99999	99999	99999	90488	31419	26812	63574	00233

Et hæc

Et hæc omnia ad taxationem diametri 2 poſtpoſitis circulis quadraginta. Eſt itaque numerus penultimus ſive nonus & viciſſimus in hoc ſyllabo complementum polygoni 1610612736o laterum. qui de diametro ſubductus relinquet 3804674322927494570 39, numerum vero minorem; idem per radium multiplicatus æquabitur quadrato dimidii ſui complementi, cumque hic tantum ſint unum & viginti notæ latus ejus ſaltem ultra vigeſimam notam non poterit tutò produci. quamobrem latus polygoni 3221225472o laterum dabitur 19505574390228795747 proximè minus verò ad taxationem diametri 200000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000 particularum. Quem uſum iſti numerorum ſyllabi nobis præſtent infra clarius liquibit, ne temere tantam numerorum molem huc aggregaſſe videar.

itaque

Inſcripta minor ad ſuum in ſemicirculo complementum eam habet rationem, quam inſcripta peripheriæ duplæ ad ſuum complementum diametro auctum.



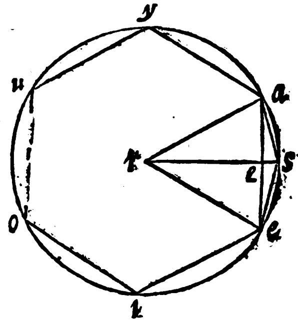
Eſto ſemicirculus *asei* & inſcripta *ei*, hujus complementum *ea*, inſcripta peripherię initio datæ *is*, ejuſdemq; complementum *as*. Ajo *ie* ad *ea* eandem habere rationem, quam *is* ad *sa* & *ai* ſimul: ſint enim *au* & *iy* ſigillatim ipſi *as* æquales. hinc demittatur perpendicularis *eo*, ea biſecabit ſegmentum *ui* per ea quæ prima propoſitione ſunt demonſtrata. Et *eo* dimidia erit inſcriptæ *is*, quia *ie* dimidia eſt peripheriæ *ies*. Erit itaque *ie* ad *ea* inſcriptam, ut *eo* ad *oa*, hoc eſt ut iſtarum duplæ *is* ad *ay*. quæ ex diametro *ia* & inſcripta *as* conflata fuerat, quod erat demonſtrandum.

Digitized by Google

PROPOSITIO III.

Rectangulum è figuræ ordinatæ circulo inſcriptæ latere uno & totidem radiorum ſemiſsibus, quot ipſum habet latera, æquatur areæ polygoni ordinati ſub duplo laterum numero in eodem circulo.

SIt in expoſito diagrammate *ae* latus ſexanguli circulo inſcripti, *as se* duo latera dodecanguli, & ducatur *sr* radius is latus ſexanguli biſecabit in *l.* hic rectangulum ſub dimidio radio *sr*, & dimidio latere ſexanguli *el* comprehenſum æquatur uni dodecanguli triangulo *ers*, & duo triangula *ars ers* rectangulo ſub toto latere *ae* & dimidio radio *sr*. pro toto igitur dodecangulo idem rectangulum ſexies erit iterandum, quot ſunt latera ſexanguli. Atque ita in reliquis omnibus analogia conſimili. exemplo rem illuſtrabimus. ſit latus ſexanguli & idem circuli radius 6, radius itaque ſexies ſumptus efficiet 36, cujus dimidium 18; quare factus à latere ſexanguli 6, & 18 erit 108 area dodecanguli eidem circulo inſcripti. etenim dodecanguli inſcripti latus per propoſitionem primam invenietur $\surd$ 54 -- $\surd$ 18, quare perpendicularis à centro in latus ejuſdem dabitur $\surd$ $13\frac{1}{2}$ + $\surd$ $4\frac{1}{2}$, à quibus factus erit duplum unius trianguli dodecanguli 18, dimidium 9 is duodecies additus, quot ſunt triangula, dabit ut ante 108 aream totius dodecanguli.



PROPOSITIO IV.

Dodecangulum æquatur quadrato à latere trianguli æquilateri in eundem circulum inſcripti.

CUm enim latus trianguli æquilateri poſſit triplum circularis radii, tria autem radii quadrata æquentur rectangulo ſub latere ſexanguli & ſex radiorum ſemiſſibus, ſeu tribus radiis, & hoc porrò rectangulum per antecedentem propoſitionem areæ dodecanguli æquale ſit: efficitur aream dodecanguli æquari quadrato ſuper latere trianguli æquilateri deſcripto.

PROPOSITIO V.

Sexangulum eſt duplum trianguli æquilateri in eodem circulo.

SExangulum enim per theorema tertium ęquatur rectangulo ſub latere trianguli æquilateri & ſeſquialtero radio: atqui tanta quoque eſt perpendicularis à vertice trianguli æquilateri. hoc igitur rectangulum trianguli eſt duplum. atque ideo quoque ipſum, ſexangulum.

PROPOSITIO VI.

Dodecangulum eſt ſeſquialterum quadrati eidem circulo inſcripti, & ſubſeſquitertium circumſcripti.

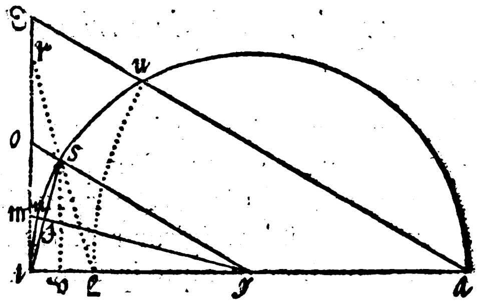
POſita enim diametro circuli partium duarum, erit latus trianguli inſcripti $\surd 3$, latus inſcripti quadrati $\surd 2$, cir-

cumſcripti 2. quantarum igitur area dodecanguli erit partium 3, tantarum area inſcripti quadrati 2, & circumſcripti 4.

PROPOSITIO VII.

Triens lateris trianguli æquilateri circulo inſcripti, æquatur ſemiſſi lateris circumſcripti ſexanguli.

SIt *au* in expoſito ſemicirculo inſcripta latus trianguli æquilateri, idque continuatum occurrat tangenti *ie* in *e*. ſitque *ins* pars totius peripheriæ duodecima, & ideo tangens ejus *io* dimidium circumſcripti ſexanguli latus, atq; eadem *io* erit dimidia totius *ie*, quia in triangulis rectangulis ſimilibus *iyo iae*, radius *iy* dimidius ſit diametri *ia*; & *io* igitur dimidia *ie*.



Ajo eandem *oi* æquari trienti lateris *au*. Cum enim ab *e* puncto *ei ea* eductæ illa circulum tangat hæc ſecet, rectæ *ea ei eu* continuè proportionales erunt. eſt autem *ei* dimidia dimidia ipſius *ae*. quia *eai* dimidium eſt trianguli æquilateri: quare *eu* quoque erit dimidia ipſius *ei*, & ipſi *io* æqualis; & pars quarta totius *ae*, tertia autem pars lateris *au*. quod erat demonſtrandum.

PROPO-

PROPOSITIO VIII.

Differentia diametri à latere inſcripti trianguli æquilateri æquatur lateris dodecanguli circumſcripti dimidio.

STatuatur enim in eodem diagrammate *al* æqualis lateri inſcripti trianguli æquilateri *au*. & biſecetur *is* peripheria in *n*, & continuetur *yn* radius ad tangentem in *m*. ut *im* ſit dimidium circumſcripti dodecanguli latus, & *ij* inſcripti. Inde ab *l* per *s* recta educta occurrat tangenti in *r*. conſtat itaque è demonſtratione propoſitionis primæ *sl si* inter ſe æquari. atque ideo *sv* perpendicularem dimidio lateris ſexanguli æqualem biſecare rectam *il*: & propterea, ut *lv* dimidia eſt totius *il*, ita *sv* dimidiam eſſe ipſius *ir*. cunq; angulus *rli* angulo *jiy*, hoc eſt ipſi *imy* ſit æqualis & angulus *i* ad contactum rectus & *ri* radio *iy*, triangula *yim ril* erunt æquiangula & æquilatera. atque *il* differentia lateris inſcripti trianguli à diametro æqualis tangenti *im* circumſcripti dodecanguli lateris dimidio. Sit nobis *ai* diameter 2, latus inſcripti trianguli æquilateri *au* erit $\sqrt{3}$: atque inde dabitur *il* ſive im $2-\sqrt{3}$. è canonibus adſcriptarum datur *im* tangens 15 gr. 267949072431 poſito radio 1000000000000 particularum. atqui ſi latus trianguli æquilateri 1732050927569 de diametro 2000000000000 deducas tantundem relinquetur pro ſegmento *il*.

itaque.

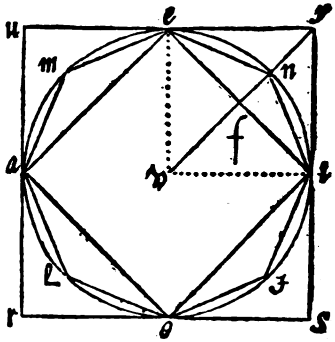
Secans 15 gradium æquatur quadruplo ſinus ejuſdem

Namque *rl*, æqualis ſecanti *my*, demonſtrata eſt æquari duobus inſcripti dodecanguli lateribus. & ideo quadrupla ſinus ejuſdem. ſinus 15 gradium ad eandem diametrum datur $258819045102\frac{1}{2}$, cujus quadruplum 1035276180410 æquatur ſecanti ejuſdem peripheriæ.

Digitized by Google

PROPOSITIO IX.

Inter figuras ordinatas ſimiles eidem circulo adſcriptas, inſcripta duplo laterum numero media proportionalis eſt.



Ita ſexangulum inſcriptum inter inſcriptum & circumſcriptum triangulum proportionale eſt. dodecangulum inter ſexangula, decangulum inter quinquangula. Sit circulus *aeio* & quadratum eidem inſcriptum, circumſcriptum autem *uysr*, octangulum inſcriptum, id enim duplo plura habet latera quam quadratum ſit *a menio*. ajo hoc inter quadratum inſcriptum & circumſcriptum eſſe proportionale. recta enim à centro *v* ad *y* angulum quadrati circumſcripti biſecabit latus quadrati inſcripti & peripheriam ſubtenſam, atque per angulum octanguli *n* tranſibit. & ſunt *o* radii *ev vi* ad contactum *e i*. erit itaque *yve* triangulum rectangulum,& *ef* in baſin *vy* perpendicularis: quare *yv ve*, id eſt *vn*, & *vf* continuè proportionales. & ideo triangula *evf evn evy* ſuper iſtis baſibus æque alta itidem continuè proportionalia. & eorum igitur octupla, id eſt quadratum inſcriptum, octangulum, & quadratum circumſcriptum continuè erunt proportionalia.

Poſita itaque diametro partium 2, area inſcripti quadrati erit 2, octanguli $\surd$ 8, quadrati circumſcripti 4.

Dodecangulum ad octangulum eidem circulo inſcriptum ſe habet ut 3 ad $\surd$ 8. hoc eſt ut tres radii ad duo latera inſcripti

ra inſcripti

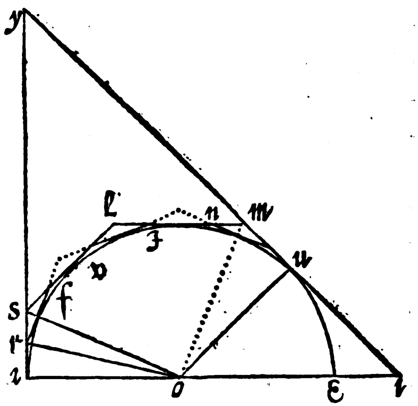
ra inſcripti quadrati. ſunt enim iſta ex antecedentibus manifeſta.

Atque hinc etiam eorum error eſt manifeſtus, qui aream circuli inter quadratum inſcriptum & circumſcriptum medio loco proportionalem conſtituunt.

PROPOSITIO X.

Differentia radii circularis à latere inſcripti quadrati æquatur lateris octanguli circumſcripti dimidio.

Sit ſemicirculus *ajue* ſuper *ae* diametro deſcriptus, quem *ui* recta radio æqualis contingat, atque ad contactum adjungatur radius *ou*. itaque *ou* quæ duplum poteſt radii erit æqualis lateri inſcripti quadrati, & eadem quoque ſemidiagonius quadrati circumſcripti, cui æqualis ſit *im*. Ajo *um* differentiam æquari dimidio lateris octanguli circumſcripti. Enimverò cũ angulus *oim* ſit recti dimidius, angulus *moi* erit dimidius ſeſquirecti, ſive $\frac{3}{4}$ unius recti, & *uoi* recti itidem dimidius: quare *mou* $\frac{1}{4}$ recti æquabit. atque ideo erit tangens *mu* dimidium latus octanguli. quod demonſtraſſe oportuit. Poſito itaque radio partis unius, erit *oi* $\sqrt{2}$, & *ei* vel *um* $\sqrt{2}-1$, & *ai* $\sqrt{2}+1$. Unde ratio *ai* ad *ei* datur quæ $\sqrt{2}+1$ ad $\sqrt{2}-1$, vel etiam quæ quadrati *ai* ad quadratum



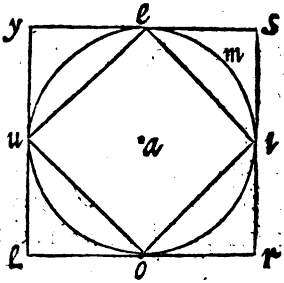
ui, hac

ni, hoc eſt quæ $3 + \sqrt{8}$ ad 1. hujus theorematis uſus infra nobis erit. Hactenus adſcriptarum figurarum comparatio inter ſe dicta fuit: ſequitur earundem comparatio cum circulo.

PROPOSITIO XI.

Ambitus rectilinei circulo inſcripti ejus peripheriæ cedit: circumſcripti verò eandem excedit.

In circulum expoſitum *emiou* inſcribatur rectilineum *eiou* & circumſcribatur *ysrl*. illius ambitus peripheriæ cedet, hujus vero eandem excedet. Cum enim propter rectæ lineæ definitionem ea ſola inter ſuos limites æqualiter interjaceat, ambitioſa autem contra. merito ex hac luce ab Archimede in libro de ſphæra & cylindro poſtulatur τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν rectam omnium intra eoſdem terminos linearum eſſe breviſſimam. Atque ideo ſimul omnes rectæ *ei io ou ue*, ſimul omnibus peripheriis quas ſubtendunt minores erunt. Porrò ambitum polygoni circumſcripti peripheriâ majorem id Archimedes ibidem ex eadem luce generali aſſumpſit potius quam demonſtravit. & nos eadem claritate contenti minorem eſſe aſſumemus. quia videlicet *emi* peripheria interiore & ordinato ambitu meat, & rectæ *ei* propior ſit quam *es* & *si*. unde efficitur totam peripheriam minorem eſſe toto circumſcripti rectilinei ambitu. Atque ideò aliquot polygonorum inſcripto-



rum

rum & circumſcriptorum ambitus quantitatem numeris expreſſam ſubjiciam, ut inde liquidò pateat intra quos terminos ratio diametri ad perimetrum ſecundum Archimedem paulatim cogatur.

Poſita itaque diametro partis unius, tum

Perimeter octogintanguli inſcripti erit major quam $3\frac{1404}{10000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{1418}{10000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 160 laterum erit major quam $3\frac{14136}{100000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{14202}{100000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 320 laterum erit major quam $3\frac{1414}{10000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{1418}{10000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 640 laterum erit major quam $3\frac{14157}{100000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{14162}{100000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 1280 laterum erit major quam $3\frac{14158}{100000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{141606}{1000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 2560 laterum erit major quam $3\frac{1415918}{10000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{141595}{1000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 5120 laterum erit major quam $3\frac{1415924}{10000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{1415952}{10000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 10240 laterum erit major quam $3\frac{1415926}{10000000}$, circumſcripti autẽ minor quam $3\frac{14159281}{100000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 40960 laterum erit major quam $3\frac{14159265}{100000000}$, circumſcripti autem minor quã $3\frac{14159266}{100000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 81920 laterum erit major quam $3\frac{141592528}{1000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{141592656}{1000000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 163840 laterum erit major quam $3\frac{1415926533}{10000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{14159265398}{100000000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 327680 laterum erit major quam $3\frac{14159265354}{100000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{14159265369}{100000000000}$.

Digitized by Google

Perimeter polygoni inſcripti 655360 laterum erit major quam $3\frac{141592653577}{1000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{14159265362}{100000000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 1310720 laterum erit major quam $3\frac{141592653586}{1000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{141592653594}{1000000000000}$.

Perimeter inſcripti polygoni 2621440 laterum erit major quam $3\frac{1415926535889}{10000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{1415926535898}{10000000000000}$.

Perimeter inſcripti polygoni 5242880 laterum erit major quam $3\frac{141692653589}{1000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{14159265391}{100000000000}$.

Perimeter inſcripti polygoni 10485760 laterum erit major quam $3\frac{1415926535896}{10000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{141592653589798}{1000000000000000}$.

Perimeter inſcripti polygoni 1073741824 laterum erit major quam $3\frac{141592653589793225}{1000000000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{141592653589793245}{1000000000000000000}$.

Perimeter inſcripti polygoni 6442450944 laterum erit major quam $3\frac{1415926535897932383}{10000000000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{1415926535897922388}{10000000000000000000}$.

Perimeter inſcripti polygoni 32212254720 laterum erit major quam $3\frac{141592653589793238453}{1000000000000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{141592653589793238469}{1000000000000000000000}$.

Atque ita experiunti porrò circuli perimetrum intra iſtiuſmodi terminos concludere eâdem viâ licebit per primum & ſecundum hujus libri theorema; quæ perpetuis adſcriptorum laterum biſectionibus eadem in minimas quaſque particulas concidunt. ſemper enim circuli peripheria minor erit ſumma omnium laterum circumſcriptorum, major autem inſcriptorum laterum omnium congerie. Atque hæc materia non olim ſolum Apollonium Pergæum,

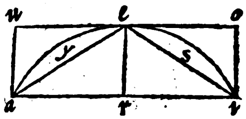
Digitized by Google

gæum, Philonem Gaditanum, & Claudium Ptolomæum quoque: ſed hoc ſeculo etiam Franciſcum Vietam, Adrianum Romanum, & Ludolphum noſtrum exercuit, qui omnes Archemedęam & Regiam viam ingreſſi intra inſcripti & circumſcripti polygoni ambitum circularis peripheriæ modulum ſolide concluſerunt. reliquorum enim ψευδογραφίας nunc miſſas facio, qui aut à veritatis tramite longe exorbitaverunt, aut intra minorem & majorem terminum peripheriæ modulum concludere non potuerunt; id enim ſolum in hoc genere erat palmarium.

PROPOSITIO XII.

Sectio ſemicirculo non major cedit trianguli æquicruri ſibi inſcripti duplo.

ETſi hujus theorematis veritas etiam ad quaſdam ſectiones ſemicirculo majores pertineat, cum tamen haud liqueat ubi ultimus ille limes ſit conſtituendus; & nobis ad id quo intendimus iſta ſufficiant, abunde ſatis erit de ſectionibus ſemicirculo non majoribus ejus veritatem comprobaviſſe. Exponatur itaque *ayi* ſectio ſemicirculo non major, & in eo triangulum æquicrucrum *aei*; eſt igitur *ayi* peripheria biſecta in *e*. & eam ob cauſam *re* perpendicularis quoq; ſecabit inſcriptam



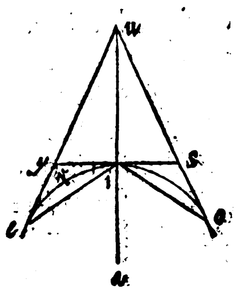
ai, & recta *uo* in *e* puncto peripheriam contingens erit eidem inſcriptæ parallela; hinc *ue eo* ipſis *ar ri* æquales conſtituantur & compleantur rectangula parallelogramna, *auer ioer*: cum igitur & ſemicirculi & minorum ſectionum anguli recto cedant, anguli autem *uar oir* recti ſint, rectæ

ua io extra circulum cadent, & totum parallelogrammum *auoi* totam ſectionem *ayes* comprehendet, eâdemque major erit: ſed *auoi* parallelogrammum duplum eſt trianguli *aei* in eadem baſi æquealti, quamobrem ſectio *ayesi* minor erit ejuſdem trianguli duplo.

PROPOSITIO XIII.

Spatium à duabus ex eodem puncto tangentibus & peripheria comprehenſum minus eſt duplo trianguli æquicruri ab earundem ſegmentis & tertia eandem peripheriam tangente comprehenſi.

RECtæ *ue uo* ex eodem puncto eductæ tangant peripheriam *eio* in *e* & *o*: tum recta *ys* eandem peripheriam contingens in *i*, abſumat *yus* trangulum æquicrurum. ajo hoc majus eſſe dimidio ſpatii *eiou* à tangentibus & peripheria comprehenſi. Cum enim *uy us* æquentur, & reliquę ideo *ye so* æquales erunt, & iiſdem rectæ *si yi* quoque æquabuntur. cum *si so*, *yi ye* ex iiſdem punctis circulum contingant. cumque anguli ſub baſin æquentur, triangula quoque *eyi osi* erunt æquilatera, atque ideo totum triangulum *eiu* toti *oiu*. ſed *eyi* triangulum æquealtum *yiu* triangulo minus eſt baſi; quia *yi* ipſi *ye* ęqualis crus eſt rectanguli *uiy*, & propterea minus baſe ejuſdem *yu*. Quare *eyi* triangulũ minus eſt quam *yiu*: & ideo idẽ *uiy* triangulum majus eſt dimidio trianguli *eiu*, & idem multo erit majus quam dimidium



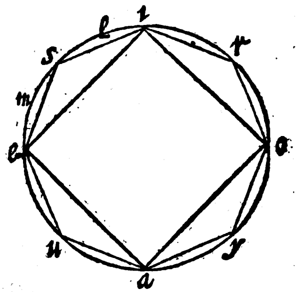
ſpatii

ſpatii *eriu*. Atque ideò totum triangulum *ysu* dimidio totius ſpatii *eri ou* majus erit. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIV.

Rectilineum circulo inſcribi poteſt majus dato quocunque ſpatio, quod eodem circulo ſit minus: & aliud circumſcribi minus dato quocunque ſpatio, quod eodem circulo ſit majus.

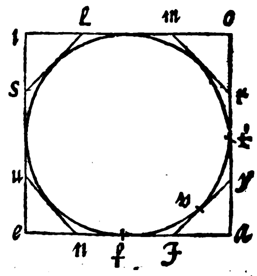
SIt enim ſpatium quodcunque datum R minus expoſito circulo; *aueioy*, in quem inſcribatur quadratum *aeio*, quod ideo majus eſt circumſcripti circuli dimidio. hoc ſi majus ſit dato ſpatio R rem factam habes. ſin minus, ſit dati hujus ſpatii à circulo defectus S, atque id ideo minus eſt omnibus reliquis quadrati ſectionibus. & quarta ejus pars unica ſectione *emli* hinc biſecetur peripheria in *s*, quare *esi* triangulum per propoſitionem 12. majus eſt dimidia ſectione *eilm*. eaque peripheriarum biſectio & inſcriptio tantiſper continuetur donec reliquæ ſectiones inter latera polygoni & circuli peripherias comprehenſæ minores ſint dicto defectu S. id enim fieri poſſe conſtat cum magnitudinum ſectio infinita



ſaltem potentia detur, & hac inſcriptione ſemper majus quam dimidium è reliquis ſectionibus auferatur. Quamobrem ſit jam eò deventum ut reliquæ ſectiones *ems sli* & ceteræ ſimul minores ſint dicto defectu *S*: inde iſtis à

 circulo

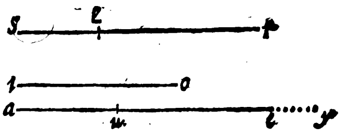
circulo deductis ſequitur relinqui majus polygonum inſcriptum, quam ſit datum ſpatium R, quod ex hypotheſi circulo minus ſtatuebatur. Atque ita pars prima conſtat: ſecunda quoque haud operoſius adſtruetur. Sit enim in ſecundo diagrammate quadratum circulo expoſito circumſcriptum, id ſi minus ſit dato ſpatio rem factam habes. ſin majus ſit, tum dati R ſpatii exceſſus ſupra circulum aſſumatur ſpatium S, erunt itaque quatuor illa ſpatia à convexis peripheriis & tangentibus comprehenſa (cujuſmodi unum eſt *fvta*) majora dato exceſſu S. quamobrem recta tangens peripheriam interceptam in medio abſumat triangulum æquicrurum *fya*, atque id in reliquis ita factum intelligatur, id igitur ipſum per propoſit 13 majus erit dimidio ſpatii comprehenſi *fvta*; eaque linearum adſcriptio tantiſper continuetur donec reliqua ſpatia omnia à peripheriis & tangentibus comprehenſa dicto exceſſu minora ſint. id autem fieri poſſe conſtat: cum magnitudinum ſectio infinita ſaltem potentia detur, & hâc adſcriptione rectæ peripheriam in medio intercepti ambitus tangentis ſemper plus quam dimidium è reliquo extra circulum ſpatio auferatur. Quamobrem ſit jam eò deventum ut reliqua ſpatia *fjvvty* & cetera ſimul omnia minora ſint dicto exceſſu S, iſtis igitur ad circulum additis ſequitur totum polygonum circumſcriptum minus eſſe area, ex eodem circulo & exceſſus S compoſita; hoc eſt quam ſit ſpatium initio expoſitum R. Quod erat demonſtrandum. Hoc ad circulorum quoque ſectores extendi, neque alia demonſtratione diſſimili indigere Archimedes monuit. Pars hujus propoſitionis prima eſt è ſecunda propoſitione libri duodecimi *eucl.*



mi *eucl.* ſecunda autem ad eandem analogiam à nobis expreſſa. Archimedes quoque etſi in ſua *κύκλου μετρήσει* hoc ipſum tantum poſtulaviſſe videatur, id tamen in libris de ſphæra & cylindro ſollicitè inculcat: quæ theoremata cum non parum momenti ad hunc locum illuſtrandum habere mihi videantur, huic operi, tanquam emblemata à nobiliſſimo autore profecta inſerenda exiſtimavi. ea igitur quam potero breviſſimè hic explicabo, & initium faciam à ſecundo.

PROPOSITIO XV.

Duæ rectæ lineæ inveniri poſſunt, quarum major ad minorem rationem habeat minorem, quam data magnitudo quælibet major ad minorem.

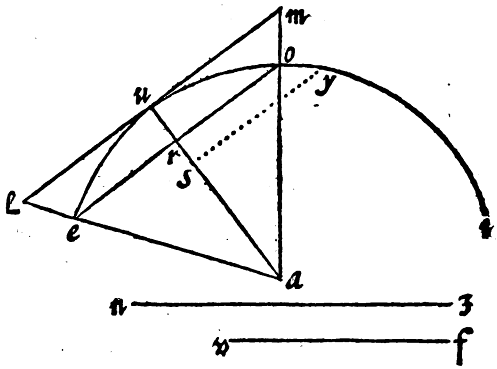


INæqualitas expoſitarum magnitudinum earundem homogeniam ita includit, ut multiplicatæ ſe mutuo ſuperare poſſint: heterogenearum enim ſecundum quantitatem comparatio nnlla inſtitui poteſt. Eſto itaque *ae* magnitudo major & *io* datarum minor: ajo duas rectas inveniri poſſe, quæ faciant quod imperatur. Auferatur eim *ue* de majore *ae* æqualis minori datarum *oi*, & ſi earum differentia ſit minor quam data *io*, tum ea toties ſibi ipſi addatur donec *ay* compoſita major ſit data *ae*. Et inde aſſumatur recta linea *sr* tam multipla quoque ſuæ partis *sl*: erit itaque ut *rs* ad *sl*, ita *ya* ad *au*, & diviſim *sr rl*, *ay yu* quoque proportionales erunt. Et cum *ay* major ſit quam *io*, ratio *ay* ad *yu*, hoc eſt *sr* ad *rl*, major erit quam *ae* ad eandem

dem *io*. Quamobrem ſunt jam inventæ duæ rectæ lineæ ſecundum leges propoſitas.

PROPOSITIO XVI.

Datæ peripheriæ duo ſimilium multangulorum latera ita adſcribi poſſunt, ut latus circumſcriptum ad inſcriptum minorem habeat rationem, quam major datarum magnitudinum ad minorem.



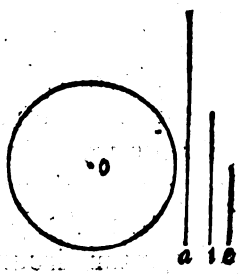
EXpoſitæ ſunto quęlibet duę inæquales magnitudines ita ut multiplicatæ ſe mutuò ſuperare poſſint R major & S minor, per propoſitionem 15 duæ rectæ lineæ conſtituantur *nj* major *vf* minor, ut ratio illius ad iſtam minor ſit quam R ad S. ſitque data peripheria *eoi* cui duo latera adſcribere oporteat, quemadmodum imperatur. fiat itaque ut *nf* ad *vf*, ita radius circuli *ua* ad *as*. Et ab *s* perpendicularis excitata abſumat peripheriam *uy*. & biſecetur tota data peripheria *ei* primum in *o* & inde rurſum *eo* in *u*, idque tantiſper continuando donec ultimum biſegmentum minus ſit quam *uy*. id enim fieri poſſe conſtat: quamobrem ſit jam eo deventum, atque id ſegmentum eſto *uo*, cui ſit æqualis *eu*, & connectatur *eo*, huic

huic *lm* peripheriam in *u* contingens erit parallela, & agantur rectæ *aom ael*, erit itaque *lm* latus multanguli datæ peripheriæ circumſcripti, & *eo* latus ſimilis multanguli inſcripti: cumque *eo* longius à centro deſtet quam *ſy*, perpendicularis *ar* major erit quam *as*, atque ideo ratio *ua* ad *ar*, hoc eſt *lm* ad *eo* major erit, quam *ua* ad *as*, hoc eſt quam *nj* ad *vſ*; atque ideò latus circumſcriptum *lm* ad inſcriptum *eo* multo minorem habebit rationem quam data magnitudo R ad S. Quod facere oportuit. Neque alia demonſtrandi formula erit ſi integra circuli peripheria proponatur. Atque ita circuli peripheria intra illos limites quantumvis auguſtos facile cogi poteſt, cum inſcriptæ & circumſcriptæ lineæ longius inter ſe diſtent, quam utraque à circuli intermedia peripheria. quod etiam numeris ad eandem analogiam omninò explicare perfacile eſt.

PROPOSITIO XVII.

Circulo duæ ſimiles figuræ ita adſcribi poſſunt ut circumſcripta ad inſcriptam majorem habeat rationem, quam data quælibet magnitudo major ad minorem.

EXponatur circulus *o*, & magnitudines duæ R major S minor. & ſunto duo polygona alterum circumſcribendum alterum inſcribendum, ut illius ad hoc ratio minor adhuc ſit quam R ad S. conſtituantur duæ rectæ *a* major *e* minor, quarũ ratio minor adhuc ſit quam R ad S, interque has inveniatur media



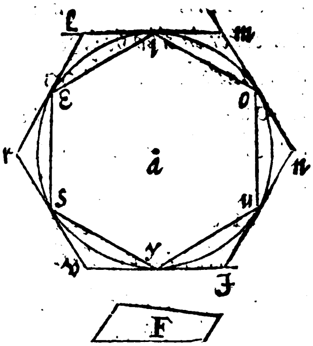
proportionalis *i*, quæ ideo minor erit quam *a*. Hinc per propoſitionem 16 dato circulo duo ſimilia polygona adſcribantur ut circumſcripti latus ad latus inſcripti ſimilis minorem habeat rationem quam *a* ad *i*. quare figuræ ipſæ erunt in duplicata ratione homologorum laterum: ſed & ratio *a* primæ ad *i* tertiam eſt duplicata ipſius *a* ad *e*, erit igitur ratio polygoni circumſcripti ad inſcriptum minor quam *a* ad *e*: & ideo quoque multo minor quam R ad S. Quemadmodum imperatum fuerat. Res omnino eadem eſſet ſi pro integro circulo ſectorem duntaxat aſſumas.

PROPOSITIO XVIII.

Circulo dato polygonum circumſcribere ut ſpatia ab ejus lateribus & peripheria convexo comprehenſa minora ſint dato quocunque ſpatio.

QVod de circulo dicimus idem quoque in ſectore quovis dato locum habere intelligatur. Datus eſto circulus *a*, & datum ſit ſpatium *F*. Ajo circulo poſſe polygonum circumſcribi ut exceſſus quo datus circulus à polygono ſuperatur minor ſit dato ſpatio F. Intelligantur enim duæ magnitudines quarum major ſit ex dato ſpatio & circulo compoſita, minor ipſe circulus; & adſcribantur circulo duo polygona, ſimilia *rlmn* & *eion*, ut circumſcriptum ad inſcriptum minorem habeat rationem quam dictarum magnitudinum major ad minorem. ajo illud circumſcriptum polygonum *rlmnjr* eſſe quæſitum cujus ſupra circulum exceſſus ſive περιλείμματα minora ſint dato ſpatio. Cum enim polygonum circumſcriptum ad inſcriptum minorē habeat

rationem



rationem, quam datũ ſpatium & circulus ſimul ad ipſum circulum, circulus autem inſcripto polygono major ſit, efficitur circumſcriptum polygonum ad circulum multò minorem adhuc rationem habere, quam datum ſpatium cum circulo ad ipſum circulum. eamque ob cauſam polygonum circumſcriptum minus eſſe dato ſpaſpatio & circulo ſimul: atque ideo ſublato utrimque circulo reliqua περιλείμματα ſive exceſſum polygoni ſupra circulum dato ſpatio F minus eſſe. Quod feciſſe oportuit.

Potuit conſectarium fieri propoſitionis 14, ſed quia hoc argumento quoque Archimedes nobis muniit viam ad circuli aream tam vero proximam conſtituendam quam cuique erit libitum, etiam ratione diametri ad peripheriam ignorata, huc quoque id referre oportunum judicavi: Et ſimul ad logiſtarum abacos provocabo. Eſto enim area circuli tam veræ proxima invenienda ut ne quidem una decies milleſima ſui parte peccetur. Conſtat autem figuram inſcriptam minorem eſſe circulo, atque ideo ejus $\frac{1}{10000}$ *minorem* $\frac{1}{10000}$ *circuli. Eſto itaque circuli diameter in numeris taxata* 2. *area dodecanguli æquatur tribus radii quadratis, quemadmodum propoſitione, à nobis demonſtratum eſt. ea igitur erit* 3. *hujus pars præſcripta ſunt* $\frac{3}{10000}$, *ea ad quamcunque figuram circumſcriptam addita, ut puta quadratum* 4 *conflabit* $4\frac{3}{10000}$. *cum itaque* $\frac{3}{10000}$ *ſunt minores parte præſcripta, &* 4 *majora area circuli; utique ratio* $4\frac{3}{10000}$ *ad* 4, *minor erit quam pars milleſima circuli ad ipſum circulum. Aſſumantur termini dehinc quivis alii, ut ratio majoris ad minorem minor adhuc, ſic quã* $4\frac{3}{10000}$ *ad* 4, *id eſt quam* 40003 40000. *ut puta* 40002 $\frac{1}{40001}$ *&* 40000 *inter has media proportionalis inveniatur* 40001. *Quare ideo*

re ideo minor eſt quam prima 4000 $2\frac{1}{40000}$. *Quare adſcribantur circulo duo polygona ut ratio circumſcripti ad inſcriptum ſit quemadmodum* 4000 $2\frac{1}{40000}$ *ad* 40001, *hoc eſt quemadmodum* 40001 *ad* 40000, *ſunt enim rationes eædem. Id autē fiet hoc modo, & ad hanc rē repetatur diagramma propoſitionis dicimæſextæ, & fiat ut* 40001 *ad* 40000, *ita* au 1, *ad* ar $\frac{40000}{40001}$: *quare reliqua* ur *valebit* $\frac{1}{40001}$ *totius* au. *id eſt ſi ad milleſimas revoces pro* ar $\frac{9999750}{10000000}$ *ferè. Initium itaque biſectionis fiat à cujuſcunque inſcripti polygoni latere dato, & tantiſper continuetur, donec recta è centro polygoni latus biſecans* ar *major ſit quam* as. *in hoc exemplo à ſexangulo initium fiat, per dodecangulum, inde* 24, *tum* 48, 96, 192, 384, *quæ nondum ſufficiunt, primum igitur occurrit perpendicularis in latus polygoni* 768 *laterum, cujus duplum in numeris inexplicabilibus valet* $\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{3}}}}}}}}$. *qui ad explicabiles reductus per milleſimas* 10000000000, *dabit ipſam perpendicularem* ar *ferè* $\frac{9999916334}{10000000000}$ *at ſi pro noviſſima nota* 5 *reponas juſtum excedet: latus autem polygoni hinc quoq; dabitur* $\frac{81812080}{10000000000}$ *ferè, quare planum eſt collatis numeris* as $\frac{9999750}{10000000}$, *&* ar $\frac{9}{10}$-$\frac{999916334}{0000000000}$ *hunc illo majorem eſſe. fiat itaque ut* ar *ad* eo, *ita* au *radius ad* lm *circumſcripti polygoni latus,* $\frac{81812764}{10000000000}$ *ferè, & ſi pro* 4 *in fine* 5 *reponas numerus erit juſto major. & cum* au *radius ſit unitas dabitur area unius trianguli* lam $\frac{40906382}{10000000000}$, *quæ per* 768 *numerum laterum polygoni multiplicata dabit aream quæſitam* $3\frac{1416101376}{10000000000}$ *minorem, &* $3\frac{1416101760}{10000000000}$ *majorem vera: nam unitas ultima in latere* lm *vacillabat. ajo itaque rejectis notis dubiis* $3\frac{1416101}{10000000}$ *non abeſſe à verâ circuli area* $\frac{1}{10000}$ *parte, quemadmodum imperabatur. nam circuli area, ut poſtea liquebit, vera proxima eſſet* $3\frac{1415926}{10000000}$ *minor, & ſi* 7 *in fine reponas major vera. atqui hæc ab illa diſtat* $\frac{175}{10000000}$ *duntaxat unius unitatis, quæ non eſſent* $\frac{550}{100000000}$, *id eſt* $\frac{1}{18181}$ *pars totius circuli.*

Quare conſtat polygonum numeris expreſſum circulo ita eſſe circum-

circumſcriptum ut ne quidem $\frac{1}{100000}$ circularis area eandem ſuperet. itaque licet hinc

Circulo dato polygonum inſcribere ut reliqua circuli ſegmenta minora ſint ſpatio quocunque dato.

Nam cum per antecedentem propoſitionem polygona duo ita circulo adſcripſeris, ut circumſcriptum ad inſcriptum rationem habeat minorem, quam datum ſpatium & circulus ad ipſum circulum: ſit autem circumſcriptum polygonum demonſtratum minus circulo & dato ſpatio ſimul; differentia inſcripti & circumſcripti minor erit differentia circuli à dato ſpatio & circulo ſimul; id eſt ipſo dato ſpatio. Atque ideo inſcripti polygoni à circulo differentia, hoc eſt reliqua ſegmenta dato ſpatio multo erunt minora. quod erat faciendum.

Quamobrem idem hic numerorum calculo ex antecedente exemplo comprobare haud admodum difficile fuerit. ut ſi poſtuletur polygonum inſcriptum quod à vera circuli area non abſit $\frac{1}{10000}$. aſſumatur tantum idem laterum inſcripti polygoni numerus qui illic circumſcripti 784, hoc igitur polygonum quæſito ex demonſtratis ſatisfaciet. Latus inſcripti illic inventum fuit $\frac{81812082}{10000000000}$ minus & $\frac{818112081}{10000000000000}$ vero majus, unde area polygoni dabitur $3\frac{1415838720}{10000000000000}$ minor & $3\frac{1415839104}{10000000000000}$ vera major, rejectis itaque notis dubiis dabitur $3\frac{141583}{1000000}$ minor, & ſi pro nota ultima 3 tantum 4 reponas vera major. Atque hæc erit illa area inventa, quæ ſecundum demonſtrata ne quidem $\frac{1}{10000}$ circuli ipſo minor ſit. Ante autem inventa area circumſcripti polygoni $3\frac{141610}{1000000}$ non erat tantillo quoque major, nam neque iſtæ ipſæ tantilla parte inter ſe diſtant, quemadmodum demonſtrationi calculus conſentiens planiſſime coarguit, cum ea non ſit $\frac{27}{10000000}$ unius mutatis, vel ne quidem circumſcripti polygoni pars $\frac{24}{10000000}$ vel $\frac{1}{11904}$ ut proximè. eſt autem circumſcriptum polygonum circulo majus. Quare exhibita ſunt duo polygona

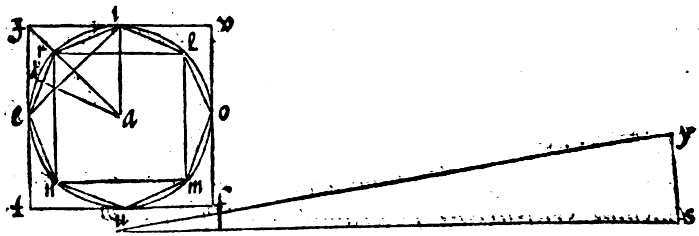
$3\frac{141783}{10000000}$ & $3\frac{141610}{10000000}$ inſcriptum & circumſcriptum, quæ neque à ſe mutuo, multò minus à circulo intermedio diſtent $\frac{1}{100000}$ parte.

Hæc omnia adeò Archimedeæ demonſtrationis lineamenta ſecutus preſſius per numeros explicavi: ut vel hinc ſaltem illi quoque ſuum errorem agnoſcant, qui rationem diametri ad peripheriam nihil ad areæ ejus inventionem facere exiſtimant. Eoſdem tamen Archimede duce iſta, quæ ſequitur propoſitione ſolidè & apodictìcè quoque refutare conſtitui.

PROPOSITIO XIX.

Circulus æquatur triangulo, cujus altitudo radio baſis peripheriæ ejuſdem ſit æqualis.

ARchimedis eſt de dimenſione circuli propoſitio prima. Exponatur enim circulus ex *a* centro decircinatus, & triangulum cujus altitudo *ys* radio *ai*, baſis autem *us* peripheriæ *ioue* æqualis ſit. Ajò hoc ipſum dato circulo pariter æquari. Etenim ſi inæqualis æſtimetur, ſit ergò primum circulus major triangulo, & inſcribatur polygo-



num quodlibet *erilomun* majus dato triangulo, id enim fieri poſſe propoſitione 14 jam patuit. In cujus latus ex *a* centro demittatur perpendicularis *ad*, ea igitur altitudine trianguli

trianguli erit minor: atqui inſcriptorum laterum ſumma minor eſt ambitu circuli cui tamen baſis expoſiti trianguli ponitur æqualis. atque ideo area inſcripti polygoni (quæ itidem triangulo rectangulo è ſua perpendiculari & perimetro comprehenſo æqualis eſt) expoſito triangulo multo eſſet minor. quod abſurdum fuerit.

Secundò jam circulus ipſo triangulo ſtatuatur minor, & ei circumſcribatur polygonum *rilomune* minus expoſito triangulo, id enim fieri poſſe propoſ. 4 jam patuit. hinc radius *ar* ad contactum ductus, lateri ejus perpendicularis inſiſtet. atque ideo triangulum, cujus altitudo radio baſis autem rectilinei circumſcripti perimetro æquatur, majus eſſet expoſito triangulo, quod itidem abſurdum per ſe eſt manifeſtum. relinquitur itaque hoc triangulum cum expoſito circulo paria facere.

itaque

Factus è radio & dimidia peripheria eſt area circuli.

Rectangulum æquatur triangulo æquealto baſique duplo. atque hinc igitur data area & radio dabitur peripheria. Ut in propoſitionis decimæoctavæ conſectario poſita diametro partium 2, datur area circuli $3\frac{141583}{1000000}$ minor vera, & $3\frac{141610}{1000000}$ major vera, quare utrâque per radium 1 diviſâ dabitur dimidia peripheria $3\frac{14158}{100000}$ minor, & $3\frac{14161}{100000}$ major quarum duplum totam peripheriam definiet $6\frac{28316}{200000}$ mnorem, & $6\frac{28322}{100000}$ majorem vera. Et contra data perimetro dabitur area tam veræ proxima quam iſta peripheria concedet. Ut diametro iiſdem partibus taxata è catalogo inductionum ad propoſitionem undecimam annotato datur porpheria circuli minor quam $6\frac{2831853071795865}{10000000000000000}$, major autem quam $6\frac{2831853071795864}{10000000000000000}$. atque ideo hujus dimidium $3\frac{1415926535897932}{10000000000000000}$ minus, illius autem $3\frac{2031853071795865}{20000000000000000}$ vel etiam quod pauxillò ſit majus $3\frac{1415926535897938}{10000000000000000}$ longe majus erit vera circuli area.

Eadem

Eadem ratio & demonſtratio in quibuſlibet circuli ſectoribus locum habet, æquantur enim triangulo, cujus altitudo radio, baſis eorundem peripheriæ in quam inſiſtant æqualis ſit. analogia inquam demonſtrationis ex antecedentibus poti poteſt. Horum omnium veritas tantò mihi magis vindicanda & ſtabilenda fuit, quod omnes ii, quorum rationibus cum Archimedea & regia via minus convenit, è veſtigiò has ex adſcrîptione deductas demonſtrationes, & verè κυρίας δόξας ſtolidè oppugnent, & pari impudentia apud ſui ſimiles traducant. tanquam nullum circulo æquale ſpatium dari, aut inter curvum & rectum propter heterogeniam ulla comparatio poſſit inſtitui. Atqui illos omnes Hippocrates Chius, ex mercatore philoſophus, luculenter refutavit, qui lunulæ æquale triangulum comparavit. ſed quoſdam etiam ſubmuſſitantes ſubaudio, dari angulum rectilineum minorem angulo ſemicirculi, dari item majorem: at æqualem nullum dari.

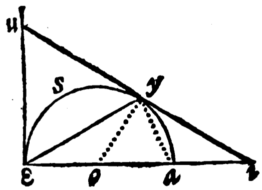
Verum iſti vim & robur demonſtrationum Archimedearum haud quaquam mihi ſatis percepiſſe videntur. neque enim ita ſuam ἀπόδειξιν inſtituit atque illi cenſent, rectilineum aliquod circulo majus dari, dari etiam minus, atque ideò æquale aliquod dari poſſe. hoc enim Bryſonis, olim fuerat argumentum. Hic autem longe ſolidius, rectangulum triangulum circulo æquari oſtendit, cujus altitudo radio, baſis peripheriæ ſit æqualis: quia eo ipſo neque major neq; minor ſit. ſequitur itaq;, ſi ulla recta linea ſit perimetro dati circuli æqualis, jam omnino triangulum dato circulo æquale conſtrui, atque id in quadratum haud difficulter transformari poſſe. Rectam autem aliquam lineam datæ peripheriæ æqualem exiſtere à nemine unquam eſt dubitatum, εἶναι γὰρ τινα τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ πρὸς οὐδενός ἐστι ζητούμενον ait Eutocius. non

quod

quod mechanica aerei circuli revolutione recta linea ejus circumferentiæ æqualis poſſit conſtitui: ſed quod ἐφάρμωσις geometrica, quæ ſola mentis acie & in ejus abaco eſt concipienda, neque phyſicis, aut corporeis rebus admiſcenda, eam æqualitatem hujuſmodi revolutione arguat & evincat. Hactenus itaque negotium quadratarium res ſuas ſibi ſartas & tectas habet; etiamſi nemo mortalium eam æqualitatem per circinum & regulam explicare potuerit. neque enim divinus Archimedes in comparatione perimetri figurarum adſcriptarum aliud ſecutus eſt, quam ut his limitibus circumpoſitis (cujuſmodi undecima propoſitione expreſſimus) circularis gæodæſiæ uſum parabilem & facilem nobis expediret. Atque ita contra quorundam temeritatem, & futilem ἀγεωμετρησίαν, horum veritas tandem nobis ſatis munita nunc eſto; ut ad noſtrorum epichirematum explicationem deinceps ſecurus tranſeam.

PROPOSITIO XX.

Si diameter radio æqualiter continuetur, & recta à termino continuatæ circulum contingat, ſegmentum convexi à contactu ad diametrum erit totius circuli ſextans, reliquum triens.



SIt enim diameter *ea* continuata in *i*, ut *ai* radio æqualis ſit, & ab *i* educatur *iy* recta circulum contingens. Ajo *ya* circuli convexum ſegmentum eſſe totius partem ſextam,

tam, & *ye* trientem. connectantur enim *yo ya*. Erunt itaque *eya oyi* triangula rectangula, hic ob contactum, ille quia in ſemicirculo eſt. atque ideo rectæ à baſis medio ad recti verticem *oy ay* ipſarum baſium biſegmentis æquales erunt. atqui biſegmenta *eo ai* ex hypotheſi æquantur: itaque *oy ay* inter ſe quoque æquabuntur, quare *ay* radio circuli æqualis latus erit inſcripti ſexanguli, & *ey* latus trianguli. atque ideo quoque peripheriæ ab his ſubtenſæ, hæc triens, illa totius circuli ſextans erit.

PROPOSITIO XXI.

Si à termino diametri radio æqualiter continuatæ recta circulum contingens, rectæ in reliquo diametri termino eundem contingenti occurrat, intercipiet ab ea ad contactum rectam æqualem inſcriptæ utriuſque contactum connectenti.

DIameter *ea* in propoſitionis antecedentis diagrammate continuetur intervallo *ai* ejuſdem radium æquante. & ab *i* puncto tangens *iy* educta occurrat tangenti *eu* in *u*. ajo rectam *eu* inſcriptæ *ey* utriuſque contactum connectenti æqualem eſſe. cum enim *ya* ſit pars ſexta circuli, angulus *yea* erit pars recti tertia. totus autem *uei* eſt ob contactum rectus: reliquus igitur *uey* valet recti duas tertias: atqui *uye* eidem æquatur; ſunt enim rectæ *ue uy* ob eodem puncto circulum contingentes æquales: quamobrem etiam reliquus *euy* $\frac{2}{3}$ recti valebit, & ideo totum triangulum *uye* erit æquilaterum.

CONSE-

CONSECTARIVM I.

itaque

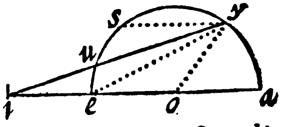
Perpendicularis à vertice trianguli æquilateri circumſcripti eſt tripla radii circuli inſcripti.

VT in eodem diagrammate *uei* eſt dimidium trianguli æquilateri, quia *euy* valet $\frac{2}{3}$ recti, & *ui* dupla ſit ipſius *uy* vel *ue.* perpendicularis autem à vertice in baſin eſt ipſa *ei.* Hinc illud quoque ſi neceſſe eſſet inferri poſſet. triangulum circumſcriptum, duplum eſſe ſexanguli, & quadriplum trianguli in eundem circulum inſcripti.

PROPOSITIO XXII.

Si à puncto quod diametri intervallo ab ejus centro diſtat, duæ rectæ peripheriam ſecantes educantur, ſegmentum peripheriæ convexum ab iis interceptum minus eſt concavi dimidio, majus triente.

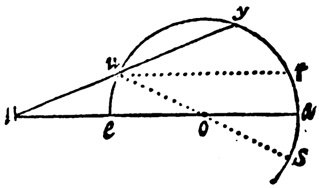
SIt ſemicirculus *aue* cujus diameter radio æqualiter continuetur in *i.* ſi recta *iu* ab *i* puncto educta circulum ſecet, & in peripheriæ concavum producatur uſque in *y*; Ajo *ue* convexi ſegmentum ab his duabus lineis interceptum minus eſſe dimidio concavi *ya*, majus autem eſſe ejuſdem triente. ducatur enim radius *oy*, & inſcripta *ey*; cum itaque angulus *iyo* ſit à ſecante & radio comprehenſus, & ideo acutus, recta *ey* à medio baſis *io* ad verticem major erit ejus biſegmento, hoc eſt radio



 eo vel,

eo, vel etiam continuatione *ei*. Et propterea in triangulo *iey* erit angulus *yie* à majore latere ſubtenſus major angulo *iye*. ſit jam *ys* parallela contra diametrum, atque ideo *syu* æqualis ſibi alterno *yie*, major quoque erit angulo *uye*. quare peripheria *su* in quam major angulus inſiſtit major erit quam peripheria *eu*. & propterea *eu* minor quam dimidia *es*, vel quod idem ſit, quam dimidia *ay*.

Eadem tamen *ue* major eſt triente *ya*. ſit enim in hoc diagrammate *ur* contra diametrum *ae* parallela, & ab *u* agatur diameter *us*. erit itaque *yur* angulus angulo *yia* æqualis, & *sur* ipſi *uoe*, & propterea *sar* peripheria dupla ipſius *ue*, & *yr* dupla ejus quę competeret angulo *yur* ſive *uio* in centro poſito. Sed *uio* eſt minor quam *uoi*: quia in triangulo *iuo* latus *ui* majus eſt quam *uo*, cum ex hypotheſi *uo* radius continuationi *ie* ſit æqualis.



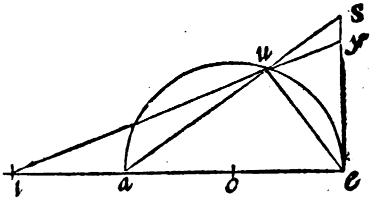
quare *eu* peripheria, ſive eidem æqualis *as* major eſt quam dimidia *yr*. & propterea etiam *ra* ſeu *eu* major quam tertia pars totius *ay*. cum *ra* & *as*, ſive *eu* inter ſe parient. Quamobrem erit quidem *eu* ſemper major triente ipſius *ya*, ſed minor tamen ejuſdem ſemiſſe. quod demonſtrandum fuerat.

PROPOSITIO XXIII.

Si à termino diametri radio æqualiter continuatæ, recta per peripheriam educta eundem in reliquo diametri termino tangenti occurrat, abſumet ad contactum rectam majorem, quam ſit ea quæ peripheriæ abſumptæ eſt inſcripta.

EXponatur centro *o* peripheria *aue*, cujus diameter *ea* continuetur in *i*, ut *ai* radio æqualis ſit, inde in *e* diametri termino

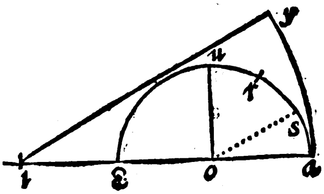
tri termino tangens excitetur *es*. ajo rectam quæ ab *i* educta peripheriam ſecat in *u* & tangenti occurret in *y*, abſumere à tangente ſegmentum *ye* majus inſcripta *ue*. recta enim ab *a* termino contiuationis per *u* occurrat tangenti in *s*. in triangulo igitur *uys* externus angulus *uye* duobus interioribus & oppoſitis *suy* & *usy* æqualis eſt. atqui *suy* ſuo ad verticem *iua* æquatur: & *usy* (ob ſimilitudinem rectangulorum triangulorum *aue eus*) ipſi *aeu*: Sed *yue* major eſt angulo *cyu*. æquatur enim internis & ipſi oppoſitis *uie* & *ieu*: porrò *uie* eſt major angulo *iua*, cum *au* inſcripta major ſit radio, ſeu quod idem ſit ipſa *ai* per propoſ. 22. ſecat enim *iu* peripheriam ex hypotheſi. quare *uia* & *ieu* ſeu *use*, hoc eſt totus *yue* major erit quam *usy* & *suy* ſimul, hoc eſt quam angulus *uye*. In triangulo igitur *uey* angulus major ſubtendetur à latere majore, & *ye* tangentis ſegmentum majus erit quam inſcripta *ue*. quod demonſtraſſe oportuit.



PROPOSITIO XXIV.

Circulorum peripheriæ, quorum anguli in centro peripheriave ſuis radiis ſunt reciprocè proportionales, ſunt æquales.

Esto peripheria *au* cujus centrum *o*, radius *ao*, & radius ſecundæ peripherię *ai* ſit verbi gratia prioris triplus. ajo ſi viciſſim angulus *uoa* ſtatuatur triplus anguli *yia* peripheriam *ya* peripheriæ *ua*

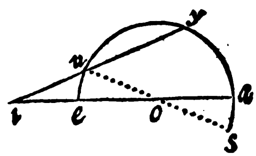


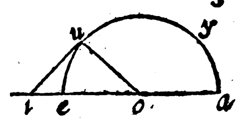
riæ *ua* æqualem eſſe. ſumatur enim *as* datæ peripheriæ *au* pars tertia. anguli igitur *yia soa* inter ſe æquabuntur, & peripheriæ *as ay* ſuis radiis erunt proportionales, & *ya* ipſius *su* erit tripla, cujus per fabricam tripla quoque eſt ipſa *ua*. quamobrem ipſæ *ua* & *ya* inter ſe æquantur. De angulis in peripheria demonſtratio huic eſt affinis.

PROPOSITIO XXV.

Si recta inter peripheriæ convexum & diametrum continuatam ſit radio æqualis, ſegmentum concavi inter eas interceptum erit convexi triplum. & contra.

SIt ſemicirculus *eua*, & recta *iu* inter ejuſdem convexum & diametrum continuatam intercepta radio æqualis primum peripheriam tangat, hinc radius *uo* ad contactum ductus faciet angulum *iuo* rectum, & ideò anguli ad *i* & *o* erunt recti ſemiſſes; & quare *eu* peripheria quadrans ſemicirculi *eua*, & reliqua *uya* erit ejuſdem ſemicirculi dodrans; atque ideò ipſius *eu* tripla. Et hinc quidem hujus theorematis explicatio primum inventa videtur. Namque etſi *iu* recta peripheriam expoſitam non tangat, ſed porròſecet, veritas omnino eadem fuerit, ut in ſecundo diagrammate *iu* continuata occurrat rurſum peripheriæ in *y*. ajo *ya* quoque triplam eſſe ipſius *ue*. ſit enim diameter *uos*. erit itaque in triangulo *iuo* angulus *yus* externus æqualis duobus interioribus & oppoſitis *uio uoi*. cumque anguli ad *o* & *i* inter





ſinter ſe æquentur, & *uoe* angulus in centro ſit, ſequitur *yus* inſiſtere in peripheriam *yas* quadruplam peripheriæ *eu*, ſeu quod idem ſit ipſius *as* quare reliqua *ya* ipſius *as*, ſeu *ue* tripla erit. Et contra, ſi peripheria *ay* ſit tripla *ue*, recta per *y* & *u* educta diametro continuatæ occurrens intercipiet rectam *ui* radio æqualem. etenim *as* peripheria ipſi *ue* ponatur æqualis: erit itaque angulus *eou* dimidius anguli in peripheria *yus*, quia *yas* quadrupla ſit peripheriæ *ue*. atqui *yus* æquatur duobus interioribus & oppoſitis in triangulo *iou*. quare reliquus *uio* dimidius quoque erit externi *yus*, & ideo æqualis angulo *uoi*, ipſumque adeò triangulum *iuo* æquicrurum. Quod demonſtraſſe oportuit.

LEMMA.

Diameter circuli major eſt quinque lateribus circumſcripti ſedecanguli.

VEl quod eodem redit. Complementum lateris inſcripti ſedecanguli majus eſt ejuſdem lateris quintuplo. Cum enim per conſectarium propoſitionis tertiæ latus ſedecanguli inſcripti ad ſuum complementum ſit, ut latus octanguli ad ſuum complementum diametro auctum. latus autem octanguli ad ſuum complementum, ut latus quadrati ad latus quadrati diametro auctum. Ut itaque à noviſſimo incipiamus, cum latus inſcripti quadrati ſtatuetur 5, diameter major erit quam 7: quare ratio lateris quadrati inſcripti ad latus & diametrum ſimul erit minor quam 7 ad 5 & 7, hoc eſt, ad 12. ſi itaque latus inſcripti octanguli ſtatuatur 5 ejus complementum majus eſſet quam 12. Et propterea diameter major eſſet quam 13. Rurſum autem

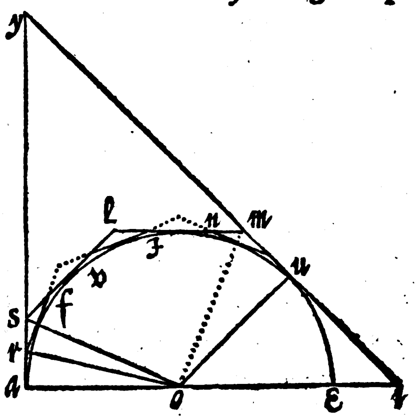
ut latus

ut latus octanguli ad ſuum complementum plus diametro, ita latus ſedecanguli ſe habet ad ſuum complementum. Atque ideo ex demonſtratis minor eſſet quam 5 ad 12 & 13, quæ conſtant 25. quamobrem viciſſim ratio complementi ad latus ſedecanguli major eſt quam 25 ad 5. Ratio itaque radii ad latus dimidium circumſcripti ſedecanguli, vel diametri ad totum latus eſt major quam quintupla. quod demonſtraſſe oportuit.

PROPOSITIO XXVI.

Si recta inter diametrum continuatam & peripheriæ contactum radio æqualis, occurrat rectæ circulum in remotiſſimo diametri termino contingenti, abſumet rectam majorem peripheria inter has tangentes comprehenſa.

SIt *ya* perpendicularis extremæ diametro in *a*, & altrinſecus *iu* tangens radio æqualis, quæ cum priore concurrat in *y*, erit igitur angulus *uio* recti dimidius, & *ya* tangens ipſi *ai* æqualis. & *uoi* angulus recti dimidius, & *ya* tangens ipſi *ai* æqualis, atque angulus illi deinceps *aou* ſeſquirectus, quę ſunt totius circuli $\frac{3}{8}$: & ideo peripheria *avju* tribus octanguli, vel ſex ſedecanguli lateribus apta. Atqui cum *oi* æquetur lateri inſcripti quadrati, & *oe* ſit radius



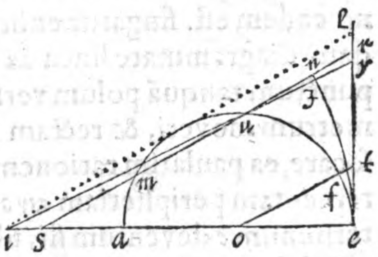
reliqua

reliqua *ei* erit latus dimidium circumſcripti octanguli per propoſitionem decimam, & ideo major latere uno ſedecanguli. Eſt autem diameter *ae* major quinque circumſcripti ſedecanguli lateribus, quare tota *ai* ſive huic æqualis *ay* tangens major multo eſt ſex circumſcripti ſedecanguli lateribus, quibus circumſcribendis apta eſt peripheria *avju*. quare *ay* hac ipſa peripheria multo erit major. Quod demonſtraſſe oportuit.

PROPOSITIO XXVII.

Si à termino diametri radio æqualiter continuatæ recta per peripheriam educta, tangenti eam in reliquo diametri termino occurrat, abſumet rectam minorem quam ſit trientis concavæ peripheriæ inter eas interceptæ tangens tripla.

SIt *ia* continuatio radio æqualis, & per *u* peripheriæ punctum agatur recta *iuy*, quæ abſumat à contingente ſegmentum *ye*. Ajo *ye* minorem eſſe recta quæ compoſita ſit è tribus tangentibus quę pertinent ad trientem peripheriæ *ue*. Sit enim *am* æqualis peripheriæ *ef*, hoc eſt trienti ipſius *ue*: & *mu* utrimque continuetur ut illic tangenti *my*, hic diametro continuatæ occurrat in *s*. atque ideo erit *ms* radio æqualis per propoſitionem 25. & *sa* recta minor quam *sm* hoc eſt quam ipſa *ai*. Porrò autem ut *se* ad *oe*



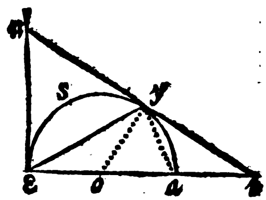
F radius

radius ad radium, ita peripheriæ angulorum æqualium *ne* ad *ef*. atqui radius *ſe* eſt minor quam tripla ipſius *fe*; & *ne* igitur peripheria non erit tripla *ef*. nec adſcripta *er* adſcriptæ *et*. ſed *ye* quæ intercipitur ab *iuy* adhuc minor eſt, quam *er*. quare *ey* multò adhuc erit minor quam *et*.

PROPOSITIO XXVIII.

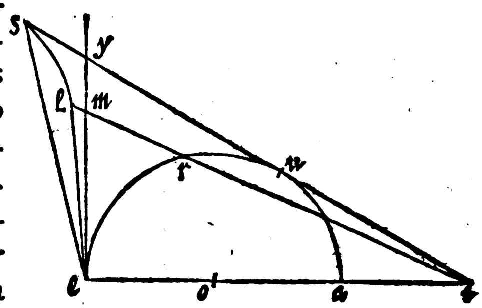
Si à termino diametri radio æqualiter continuatæ recta per peripheriam educta tangenti eam in reliquo diametri termino occurrat abſumet rectam minorem quam ſit peripheria inter eaſdem intercepta.

ID ſupra propoſitione 21 ex parte comprobatum jam nobis eſt. ſi recta à termino diametri radii intervallo continuatæ circulum contingat, tum rectam interceptam inſcriptæ æquari. ut illic *ue ey*, atque inde planum eſt eandem peripheria *eſy* neceſſariò eſſe minorem. Atqui ſi ſecet veritas omnino eadem eſt. fingatur enim in eodem diagrammate linea *iu* circa *i* punctum tanquã polum verſus diametrum moveri, & rectam in diametri termino tangentẽ ſecare, ea paulatim rationem tangentis abſumptæ *eu* ad interceptam peripheriam *eſy* adaugebit, donec ad ultimum terminum *e* deventum ſit, ubi recta peripheriæ æqualis fieret; ſed æqualitas iſta in unicum punctum evaneſcit. atque



ita quanto

ita quanto minor erit peripheria intercepta, tanto ejuſdem ab abſumto tangentis ſegmẽto differentiæ ratio erit minor Inſuper adeò ſi animo & mente concipiamus rectam peripheriæ *eru* æqualem, qualis hic eſt *es* cum *iu* continuata concurrere in *s*, id utique punctum ultra *y* cadet, cum *es* major ſit quam *ey* per propoſitionem 21. hujuſmodi occurſu linea helix *sle* decircinata eſto, ut recta ab *i* circulum ſecans helici occurrens ut *il* faciat rectam ab occurſu ad contactũ, qualis inter *el* intelligitur, efficiat abſumptæ peripheriæ *er* æqualem: atque ita porrò in omnibus locis intermediis. hoc ductu helix linea deſcribetur cujus principium in *s* extra tangentem, finis autem ſit in ipſo contactus puncto *e*. quæ tota uſque ad *e* communem terminum ultra tangentem neceſſario jacebit, cum ordinato ductu inter *s* & *e* puncta ſit deſcripta, & principium *s* extra tangentem ſit poſitum. atqui ſemper *me* tangentis ſegmentum minus eſt, quam ſit *le*: quare tangentis ita abſumptæ ſegmentum ſemper minus erit peripheriæ concavo inter dictas lineas intercepto.

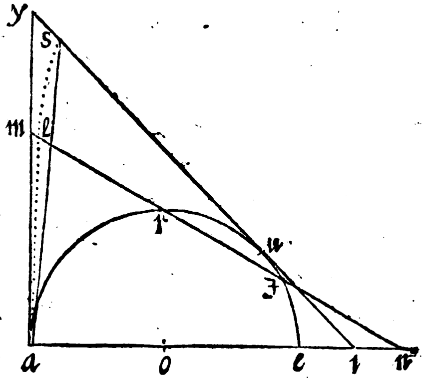


PROPOSITIO XXIX.

Linea quæ à limite triſectionis cujuſque peripheriæ rectæ in reliquo diametri termino tangenti occurrit, abſumet

è tangente ſegmentum majus quam ſit peripheriæ concavum inter ipſam & diametrum interceptum.

TRiſectionis limitem cujuſque peripheriæ voco, ex argumento propoſitionis 25, punctum in diametro continuata, unde recta ad terminum datæ peripheriæ reliquum educta ut hic *nr* abſumit peripheriam convexam *es* æqualem trienti ipſius *ar*. id autem ſingulis evenit, cum *ui* linea radio dati circuli fuerit æqualis, per propoſitionem eandem. Eſt autem propoſiti theorematis veritas ante propoſitione 26, ex parte jam nobis comprobata, ubi tangenti *ar* peripheriam intermediam *aru* cedere fuit demonſtratum. Eſto nobis expoſitum diagramma in quo *ui* recta radio æqualis peripheriam contingens tangenti *ay* occurrat in *y*, eſt itaque *eu* convexum triens concavi *ura*. atque ideo *i* limes triſectionis hoc caſu, & *ay* recta major eadem *aru* peripheria, cui æqualis fingatur recta *as*, ea igitur citra *y* terminabitur in linea *is*. Atque idem reliquis omnibus minoribus, qualis *ar*, factum intelligamus, cui *al* æqualis ſit intercepta à recta *nr*, quæ *n* ab limite triſectionis peripheriæ *ar* educta eſt. certe limes triſectionis paulatim ita retroagetur donec *en* diametrus continuata radio æquetur, ubi omnis triſectio per *a* punctum evaneſcit. Nam circa minimas peripherias limes triſectionis minimo intervallo abeſt à termino diametri radio æqualiter continuatæ:



illic

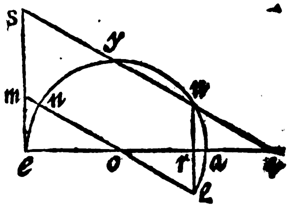
illic autem ſectionem fruſtra fatigamus. Cum itaque helix linea hoc metu decircinetur cujus initium ſit ab *s* citra tangentem, & finis ejuſdem in *a* contactus puncto, ſitque tota ordinato ſui generis ductu delineata, evidens utique eſt, non poſſe eam flexuoſo ſinuamine, & vago extra lineam tangentem procurrere, atque inde ad contactus punctum recurrere: ſed tota inter tangentem & peripheriam exporrecta jacebit. atqui tangentis ſegmentum per rectam à limite triſectionis cujuſque peripheriæ abſumtum, ut *am*, majus ſemper erit recta *al* ab ejuſdem & helicis communi ſectione ad contactum connexa. Hæc autem recta helici inſcripta ex lege hujus helicis abſumptæ peripheriæ *ar* eſt æqualis æquare ſegmentum tangentis eâdem peripheriâ majus erit. Vides itaque peripheriam intra duos limites per hanc & antecedentem propoſitionem obſeſſam teneri, quorum hic major ſit, ille minor: hoc ſolum porrò reſtat, ut quantum facilitatis logiſtarum abacis hinc accedat deinceps calculo explicemus, cujus tœdium etiam factionis aliqua concinnitate in hoc noviſſimo levare placet.

PROPOSITIO XXX.

Linea recta quæ à limite triſectionis peripheriam in reliquo diametri termino tangenti occurrit abſumit ex ea ſegmentum duobus ſinibus & uni tangenti, qui ad ejuſdem trientem pertinent, æqualem.

SIt in expoſito diagrammate recta *ui* inter peripheriæ concavum & diametrum radio æqualis, tumque per propoſitionem 25 *au* æquabitur trienti concavi *ey*, eidem

quoque æquales ſtatuantur *al* & *en* peripheriæ, & conne-ctatur inſcripta *ul*, ea diametro *ae* perpendicularis tangenti *es* erit parallela, denique *ln* diameter producta occurrat tangenti in *m*; cum itaque *ny ul* peripheriæ ſint æquales etiam inſcriptæ *uy nl* inter ſe erunt parallelæ, atque ideò oppoſitæ *ms* & *lu* æquales. eſt autem *lu* dupla ſinus *ur*: denique *em* tangens eſt trientis *en*: quare duo



ſinus cum tangente, qui pertinent ad trientem datæ peripheriæ *ey* æquantur rectæ *es*. quod demonſtraſſe oportuit. Exemplum in numeris tale eſto. In diagrammate propoſitionis 29 tangens *ay* æquatur ipſi *yu*, & tota *aru* peripheria eſt ſeſquiquadrans 135 gr. quare ipſa *ay* erit tangens 67 gr. 30 ſcr. ea ex tabulis datur 24142137. valet autem peripheriæ *aru* triens 45 gr. cujus tangens 10000000, ſinus autem ejuſdem 7071068, qui duplicatus 14142136 & ad tangentem additus dabit *ay* 24142136, quæ ante inventæ *ay* tam accurate conſentit quam canonum ſymmetria hic admittet. In cæteris omnibus veritas eſt eandem.

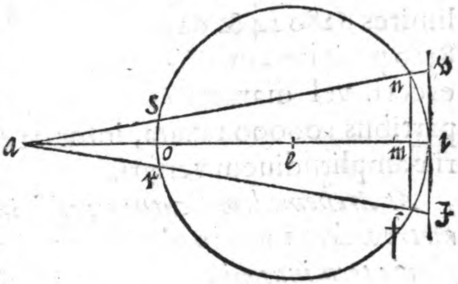
PROPOSITIO XXXI.

Rationem diametri ad ſuam peripheriam ſecundum expoſitos limites tam accuratè quam cuique collibitum erit definire.

POlygonorum adſcribendorum rationem tanquam notam hic aſſumemus; calculi autem hujus initium à ſexangulo faciam. Sit igitur in expoſito diagrammate *nf* in-

ſcripti

ſcripti ſexanguli latus in *m* puncto normaliter biſectum à diametro *io*, quæ in *a* porrò continuetur, ut tota continuata tribus radiis æqualis ſit. & ducatur tangens *vj* lateri inſcripto parallela. & ab *a* puncto rectæ per vertices inſcriptæ *nf* actæ occurrant tangenti in *v* & *j*. conſtat itaque per propoſitionem 28 *vj* rectam minorem eſſe peripheria *nif*.

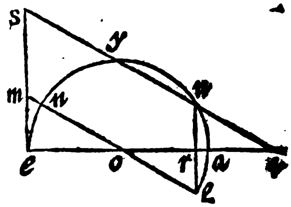


hanc itaque in numeris nobis inveſtigandam proponamus. Latus inſcripti ſexanguli *nf* radio æquale eſto 100000, hujus dimidium *mn* 50000, & *em* ſinus complementi earundem 86602. unde tota *am* datur 286602. Hinc proportio, ut *am* diameter plus ſinu complementi, ad *nf* inſcriptam, ita *ai* radii triplum 300000 ad *vj* 104674 rectam minorem ipſa *nif* totius peripheriæ ſextante, cujus ideo ſextuplnm 628044 minus erit ambitu circuli. Hic igitur terminus eſt minor; majorem autem aſſequeris hoc modo.

Sit in hoc altero diagrammate *nf* inſcripta ut ante itidem latus ſexanguli æquilateri à diametro *oi* biſectum in *m*, & tangens inſcriptæ parallela *uy*. hinc *os* peripheria ſtatuatur æqualis trienti ipſius *ni*, recta *ns* ad diametrum productam continuata intercipiet ſegmentum *ds* radio æquale per propoſitionem 25. his ita conſtitutis recta *ui* æquatur duobus ſinibus ipſius *os* & uni tangenti. Peripheria autem *ni* eſt gradium 30, hujus triens 10, tangens 17632, ſinus ejuſdem 17364, hujus duplum 34728 ad tangentem ejuſdem additum dabit quantitatem tangentis *ui* 52360 minorem peripheria *ni* per propoſitionem 29. & duplum ejus *uy*

104720

quoque æquales ſtatuantur *al* & *en* peripheriæ, & connectatur inſcripta *ul*, ea diametro *ae* perpendicularis tangenti *es* erit parallela, denique *ln* diameter producta occurrat tangenti in *m*; cum itaque *ny ul* peripheriæ ſint æquales etiam inſcriptæ *uy nl* inter ſe erunt parallelæ, atque ideò oppoſitæ *ms* & *lu* æquales. eſt autem *lu* dupla ſinus *ur*; denique *em* tangens eſt trientis *en*: quare duo ſinus cum tangente, qui pertinent ad trientem datæ peripheriæ *ey* æquantur rectæ *es*. quod demonſtraſſe oportuit.



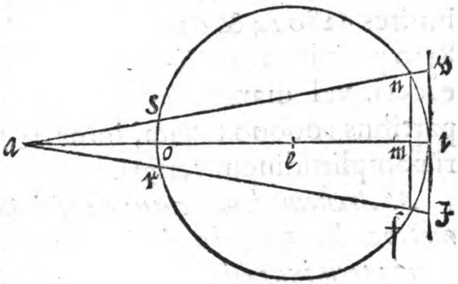
Exemplum in numeris tale eſto. In diagrammate propoſitionis 29 tangens *ay* æquatur ipſi *yu*, & tota *aru* peripheria eſt ſeſquiquadrans 135 gr. quare ipſa *ay* erit tangens 67 gr. 30 ſcr. ea ex tabulis datur 24142137. valet autem peripheriæ *aru* triens 45 gr. cujus tangens 10000000, ſinus autem ejuſdem 7071068, qui duplicatus 14142136 & ad tangentem additus dabit *ay* 24142136, quæ ante inventæ *ay* tam accurate conſentit quam canonum ſymmetria hic admittet. In cæteris omnibus veritas eſt eandem.

PROPOSITIO XXXI.

Rationem diametri ad ſuam peripheriam ſecundum expoſitos limites tam accuratè quam cuique collibitum erit definire.

POlygonorum adſcribendorum rationem tanquam notam hic aſſumemus; calculi autem hujus initium à ſexangulo faciam. Sit igitur in expoſito diagrammate *nf* inſcripta

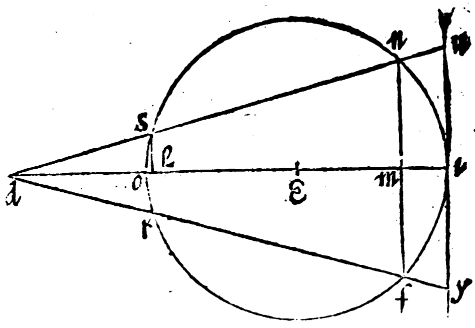
ſcripti ſexanguli latus in *m* puncto normaliter biſectum à diametro *io*, quæ in *a* porrò continuetur, ut tota continuata tribus radiis æqualis ſit. & ducatur tangens *vj* lateri inſcripto parallela. & ab *a* puncto rectæ per vertices inſcriptæ *nf* actæ occurrant tangenti in *v* & *j*. conſtat itaque per propoſitionem 28 *vj* rectam minorem eſſe peripheria *nif*. hanc itaque in numeris nobis inveſtigandam proponamus. Latus inſcripti ſexanguli *nf* radio æquale eſto 100000, hujus dimidium *mn* 50000, & *em* ſinus complementi earundem 86602. unde



tota *am* datur 286602. Hinc proportio, ut *am* diameter plus ſinu complementi, ad *nf* inſcriptam, ita *ai* radii triplum 300000 ad *vj* 104674 rectam minorem ipſa *nif* totius peripheriæ ſextante, cujus ideo ſextuplnm 628044 minus erit ambitu circuli. Hic igitur terminus eſt minor; majorem autem aſſequeris hoc modo.

Sit in hoc altero diagrammate *nf* inſcripta ut ante itidem latus ſexanguli æquilateri à diametro *oi* biſectum in *m*, & tangens inſcriptæ parallela *uy*. hinc *os* peripheria ſtatuatur æqualis trienti ipſius *ni*, recta *ns* ad diametrum productam continuata intercipiet ſegmentum *ds* radio æquale per propoſitionem 25. his ita conſtitutis recta *ui* æquatur duobus ſinibus ipſius *os* & uni tangenti. Peripheria autem *ni* eſt gradium 30, hujus triens 10, tangens 17632, ſinus ejuſdem 17364, hujus duplum 34728 ad tangentem ejuſdem additum dabit quantitatem tangentis *ui* 52360 minorem peripheria *ni* per propoſitionem 29. & duplum ejus *uy*

104720



104720 minorem toto ſextante *niſ*, cujus ſextuplũ 628320 majus erit ambitu circuli. Conſtat itaque poſita diametro partium 200,000 intra hoſce limites 628044 & 628320 peripheriam cõerceri. vel diametro partibus 100000 taxata, inter 314022 & 314160 peripheriæ amplitudinem verſari.

At Archemedem ſecutus ex adſcriptione ſexanguli poſita diametro eadem 100000, *dabitur ambitus inſcripti ſexanguli, peripheriæ terminus minor* 300000, *& circumſcripti terminus major* 346410. *qui immane quantum inter ſe diſtant. Atque ad illam vicinitatem, quam nos ab initio ſtatim ex ipſo ſexangulo derivamus, demum per inſcriptionem polygoni* 96, *& circumſcriptionem polygoni* 192 *laterum potuit pertingere. quam rem in ſua κύκλου μετρήσει ut demonſtrationibus firmiſſimis, ita calculo accuratiſſimo comprobabit. rationem enim diametri ad peripheriam iſtic ita explicavit, ut majorem eſſe doceat quam* 1 *ad* $3\frac{1}{7}$, *minorem autem quam* 1 *ad* $3\frac{10}{71}$; *quod ſi hos numeros ad centies milleſimas revoces termini iſti erunt minor* 314084, *& major* 314285. *nihilo anguſtiores noſtris, quos primo impetu expreſſimus, ille autem poſt quartam aut quintam biſectionem ſit aſſecutus. Sed eandem facilitatem & ubertatem aliquot deinceps exemplis comprobare operæ fuerit pretium. & quidem Archimedis veſtigia relegentes latus ſexanguli nunc biſecemus.*

Sit itaque in primo diagrammate *niſ* uncia totius peripheriæ, atque ideo graduum 30, cujus dimidium *ni* gr. 15, hujus ſinus *um* 2588190, & ſinus complementi *me* 9659258; unde

unde tota *am* datur 29659258. Atque inde proportio, ut *am* 29659258 ad *mn* 2588190, ita *ai* 30000000 ad *vi* 2617924, hujus duplum æquatur rectæ *vj* 5235848. & id minus eſt peripheria *nif*. cujus ideo duodecuplum 62830176 minus erit tota circuli circumferentia. Et in ſecundo diagrammate ſi *ni* itidem ſit totius peripheriæ ſemuncia, tum *so* erit graduum 10. cujus ſinus duplum eſt 1743114, tangens autem 874886, ſumma utriuſque 2718000 major peripheria *ni*, quę hic eſt totius circumferentię ſemuncia, ejus duplum 5236000 majus uncia *nif*; cujus ideo duodecuplum 62832000 majus erit tota peripheria. Atque ideo poſita diametro 100,00000 circumferentia major erit quam 31415088, minor autem quam 314162000. proxima autem veræ eſſet 31415926½.

Archimedi hinc confieret 32153904 *terminus major, &* 31058280 *terminus minor. vel ſic; poſita diametro* 10 *peripheria erit major quam* 31, *minor quam* 32. *qui termini vix in ulla mechanice uſurpari poſſent.*

Tertiò ſi *nf* concipiatur latus quator & vigintanguli, inde poſita diametro 1000,00000, ut ante, dabitur ex analogia factionis antecedentis recta *vj* 13089947, & tota circumferentia in partibus iiſdem 314158728 vera minor. Et in ſecundo diagrammate ex analogia factionis antecedentis $13089971\frac{7}{10}$, & hinc tota circuli peripheria $314159 32\frac{8}{10}$ major vera. eſt enim veræ proxima 31415926½.

Quarto ſit *nf* latus octo & quadragintanguli inſcripti poſita diametro 100000, 00000, hinc ex analogia primi exempli dabitur *vj* 654498352 minor peripheria *nf*, hujus duo-de-quinquagecuplum 31415920896 minus erit totius circuli ambitu. Haud aliter eſto in ſecundo diagrammate *nf* latus inſcripti duodequinquagintanguli, & *nif* peripheria graduum 7½, & ideo ex analogia exempli ſecundi dabitur

bitur *os*, $1\frac{1}{4}$ gr. & contingens *uy* 31415926848: cum veræ proxima ſit 31415926535 $\frac{8}{10}$.

Sed cum ſecundo modo qui per peripheriæ triſectionem majorem terminum exhibet multo propius ad verum accedatur, quam primo; ita deinceps calculum comparabo ut in ſecundo diagrammate *os* tanta aſſumatur, quanta *ni* in primo. Nam neque ſemper triens peripheriæ datæ ita commodè exhiberi poteſt.

Sit itaque in primo *nif* peripheriæ pars ſexta & nonageſima, erit itaque ea 3 gr. 45 ſcr. & *ni* 1 gr. 52 ſcr. 30 ſec. hujus ſinus *nm* 327190828, & ſinus complementi *em* 9994645875, & tota *am* 29994645875; atque hinc deinceps ex primi diagrammatis analogia recta *vj* 327249232 minor peripheria *nif*, cujus ſex & nonagecuplum 31415926272 minus erit tota circumferentia circuli. In ſecundo autem diagrammate ſtatuatur *os* peripheria $\frac{1}{96}$ ſemicirculi; erit itaque ejus ſinus *sl* 327190828, cujus duplum 654387656, ad ejuſdem tangentem 327366104 additum dabit rectam *iu* 981747760, quæ major eſt quam peripheria *ni*, hæc autem tripla eſt ipſius *os*. eſt igitur *ui* major $\frac{3}{96}$ in eſt $\frac{1}{32}$ ſemipheripheriæ, hujus itaque duo & ttigecuplum 31415928320 majus erit ſemipheria ad taxationem diametri 20000000000; aut tota, poſita diametro 10000000000.

Sexto ſi eodem modo periculum facias in latere inſcripti centum & octogintanguli. hic poſita diametro 10000000000 dabitur *vi* in primo diagrammate 174532924 $\frac{75}{100}$, quod 180 ſumptum dabit 31415926455, minus circuli peripheria. rurſum ſit in ſecundo diagrammate *sr* peripheria 2 gr. & *os* 1 gr. hinc dabitur *uy* 52359877, quæ major ſit peripheria *nif*. ea autem $\frac{3}{180}$ habet totius, quare hujus ſexagecuplum 31415926620 majus eſt vera peripheria, cum veræ proxima ſit 31415926535 $\frac{8}{10}$.

Septimo

Septimo ſi *ni* in primo diagrammate ſit peripheria dimidij gradus, ut *nf* ſit inſcripta polygoni 360 laterum. hic maiores terminos aſſumere eſt neceſſe, quia vulgatæ tabulæ ad taxationem diametri decē notarum non ſufficiunt. aſſumam itaque ſinus in partibus radii 100000, 00000, 00000. quamobrem ſinus dimidii gradus *mn* in primo diagrammate dabitur 8726535498374, & *em* ſinus complementi 99996192306417 1: unde tota *am* datur 2999961923064171, atque inde *vi* 8726646259690, quæ minor eſt peripheria *in*, is numerus per 360 multiplicatus dabit 314-1592653488400, minorem ſemiperipheria *inso* ad iſtam diametrum, aut minorem tota circumferentia poſita diametro 100000, 00000, 00000. Et rurſum in ſecundo diagrammate ſit *os* peripheria o gr. 30 ſcr. ejus ſinus ut ante 8726535498374 duplum 17453070996748, ad tangentem ejuſdem 8726867791138 additum, dabit 26179938787886 rectam *vi*, minorem quam ſit peripheria 1 gr. 30 ſcr. quæ valet $\frac{1}{720}$ totius, aut $\frac{1}{360}$ dimidii circularis ambitus. quare ille centies vicies aſſumptus dabit limitem peripheria majorem 314159, 26545, 46320 ad taxationem diametri 100-000, 00000, 00000. Veræ enim proxima hic fuerit 314-159, 26535, 89793 $\frac{2}{10}$.

Denique ultimus hic è tabulis labor nobis ſurgat, ut in primo diagrammate *ni* peripheria o ſit gr. 1 ſcr. & *nf* inſcripta duplæ peripheriæ, latus polygoni 10800 laterum. tumq; radius aſſumatur 100000, 00000, 00000, 00000, 00000, & ſinus o gr. 1 ſcr. 2908882045634245 96374, & ſinus complementi *me* 9999999576, 92025, 32795, 12624, & tota *md* 299999, 99576, 92025, 32795, 12624: atque inde *vi* recta minor quam peripheria *ni* o gr. 1 ſcr. dabitur 29088820866-572 15845829 qui numerus per 10800 multiplicatus dabit terminū ſemiperipheria minorem 3141592653 5 897931134-

 9532

-953200. vel tota perimetro, ſi diameter aſſumatur partium 100000, 00000, 00000, 00000, 00000. Et rurſum in ſecundo diagrammate ſtatuatur *os* itidem 0 gr. 1 ſcr. & ſinus ejus qui ſupra 29088820456342459637 4, is duplicatus & ad tangentem ejuſdem 29, 0888, 21687, 03159, 08121 additus dabit 872664625997165l0089 pro recta *ui* in ſecundo diagrammate, quæ major eſt quam *ni* peripheria tripla ipſius *os*. atqui *ni* valet $\frac{3}{10800}$ ſemiperipheriæ *inso*, numerus igitur inventus per 3600 multiplicatus dabit 31415926535897943631 2 majorem ſemipheripheria, vel etiam tota poſita diametro partium 100000, 00000, 00000, 00000. Quamobrem ex utriuſque comparatione datur circuli peripheria major quam 31415926535897 9, minor autem quam 314159265358980, poſita diametro partium 10000, 00000, 00000,

Atqui Archimedea via ex uno minuto in ſexto circulo deſinet: ex inſcriptis namque dabuntur 314159260, *ex circumſcriptis autem* 314159274. *quare poſita diametro* 1000000 *dabitur terminus minor* 3141592, *major autem* 3141593. *tanto itaque noſtri limites Archimedeos ſemper antevertunt, & tam longe ultra eos provehuntur. Cum nos vel ex unius gradus ſinu hanc rationem etiam ad ſeptimam notam producamus. illinc enim nobis exiſtunt termini* 31415926 *minor, &* 31415927 *major, diametro partibus* 10000000 *taxata. Vt ſemper amplius duplo characterum numero illum antevertamus. ubi illi ad ſextum circulum ratio diametri ad ſuam peripheriam deſinit, nobis ad decimumquartum facile excurrat. ſi ille decimum attingat, nos ultra vigeſimum provehamur. atque ita continuo in omnibus majoribus & minoribus conſtanti operis proceſſu. quod cum horum omnium & aliorum complurium inductione verum probari poſſit, unum iſtud duntaxat ſubjiciam, neque amplius aut abacos noſtros, aut benevolum lectorem tanto numerorum tædio deinceps fatigabo.*

E ſyllabo numerorum primo propoſitionis ſecundæ, in quo complementa ad ſemicirculum, laterum è continua quadrati inſcripti biſectione ortorum, annotavimus, aſſumatur nunc numerus duodetriceſimus 19999, 99999, 99999, 99657, 57931, 09365, 25489, 64091, 92589, 20986, 39953. qui eſt complementum lateris inſcripti polygoni 536870912 laterum, hic numerus de diametro ſubductus relinquet 342, 42068, 90634, 74510, 35908, 07410, 79013, 60047, hic porrò per radium multiplicatus dabit numerum æqualem quadrato à latere polygoni duplo laterum numero 1073741824. peracta igitur radicis inveſtigatione dabitur ipſum latus 585, 16723, 17068, 63871, 58564, 60938, 13791, 18041. & amplius, ad taxationem diametri 200000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, cum enim diametri & inſcriptæ differentia habeat duntaxat octo & triginta notas ſignificantes, hic ultima & penultima ſublubricæ ſunt, & ſi pro unitate binarium in fine reponas tum certe ut minimum illo auctoriolo juſto erit major; & ſi demas minor. hinc idem latus circulo circumſcriptum dabitur 585, 16723, 17068, 63874, 09031, 31775, 44168, 40209 minus juſto, & ſi unitate augeas juſto majus.

Hinc itaque ſi proportio inſtituatur in primo diagrammate, ut *am* 29999, 99999, 99999, 99657, 57931, 09365, 25489, 64091, 92589, 20986, 39953, ad *nf* 5851672317068638715856460938137911804 1, ita *ai* diametri ſeſquiplum ad rectam *vj*, 585, 16723, 17068, 63872, 42053, 51217, 23916, 90859, vera proximè minorem, & ſi unitate augeas majorem; hæc autem per propoſitionem 28 minor eſt peripheria *nif*. quare is numerus per 1073741824 multiplicatus dabit nobis peripheriam circuli 62831, 85307, 17958, 64769, 25286, 76655, 90056, 58559 vera minorem, poſita dia-

 metro

metro partium 20000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000. Porrò autem in diagrammate ſecundo ſit *sr* idem latus inſcripti polygoni, & propterea *uy*, per 30 propoſitionem, duobus inſcriptis & uni circumſcripto jam ante invento æquale. horum ſumma conſtat nobis 17555016951205916172616053651717507629$\frac{1}{4}$ & paulo minus, quæ major eſt peripheria *nif* per propoſitionem 29, atque ea valet triplum ipſius *or*, quæ habet $\frac{1}{10737418 24}$ totius peripheriæ: quare tota peripheria minor erit, quam 62831853071795864769252867665590057915 14. Quamobrem poſita diametro partium 20, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000 erit peripheria minor quam 62831853071795864769252867665590057915 14. major autem quam 62831 85307179586476925286766559005658559.

Hòc eſt poſita diametro partis unius, tum peripheria erit minor quam $3\frac{14}{100}, \frac{15926}{100000}, \frac{53589}{100000}, \frac{79323}{100000}, \frac{84626}{100000}, \frac{43383}{100000}, \frac{27950}{100000}, \frac{28958}{100000}$ major autem quã $3\frac{14}{100}, \frac{15926}{100000}, \frac{53589}{100000}, \frac{79321}{100000}, \frac{84626}{100000}, \frac{43383}{100000}, \frac{27950}{100000}, \frac{28283}{100000}$ vides itaque uſque ad quintum & triceſimum circulum has notas conſentire. Ludolphus per inſcriptionem & circumſcriptionem hujus ejuſdem polygoni duntaxat aſſecutus eſt hos limites $3\frac{1415926535897933}{10000000000000000}$ majorem, & $3\frac{14}{100}\frac{15926535897932}{100000000000000}$ minorem, nos ad triceſimum quartum circulum ex eodem loco produximus. vides itaque nos in omnibus ultra duplum milleſimarum vel circulorum aſſumprorum numerum conſuetam rationem ſemper antevertere. Quinimo priuſquam Archimedea adſcriptione ad adeò amplos & arctos limites devenias, opus erit longe ulterius latera adſcriptarum continuari. diligentiſſimus logiſta, Ludolphus noſter, initio facto à latere quadrati eandem inſcriptarum inventionem ſexagies continuavit, ad taxationem diametri quinque & ſeptuaginta circulorum, & inde demum iſtos limites nobis ſummo cum labore expreſſit,

preſſit, quos ideò ſepulchro ſuo tanquam exantlatorum laborum teſtes inſculpi juſſit.

$$3\frac{14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50289}{1\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000}$$

$$3\frac{14159\,26533\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288}{1\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000}$$

vides ipſum adeo immani labore duntaxat unica nota nos ſuperare, & nos in triceſimo quarto circulo, illum in triceſimo quinto deſinere. ego ex 30 & 31 noſtri ſyllabi numero ipſum una aut altera etiam nota anteverterem, ſi diameter, ſecundum quam inſcriptæ illæ taxantur, duobus tribuſve circulis fuiſſet auctior. illa enim in priore duntaxat quatuor & quinquaginta circulorum fuit aſſumpta. Tantam itaque utilitem, tantamque adeò facilitatem Logiſtarum abacis noſtrum epichirema inducit. quod tamen longe minimum mihi videatur, præ iſtis, quæ hinc deinceps poſtea deducemus.

PROPOSITIO XXXII.

Diametro binario & poſtpoſitis quotlibet circulis taxatâ, ratio diametri ad peripheriam in duplo tot circulis conſtans erit, quot novenarii continui à principio in inſcripta complementi dati lateris invenientur.

DEmonſtratio tota ab inductione pendet. & quamvis de utraque quam inſtitimus via theorema ſit verum, ſatis fuerit de prima demonſtraviſſe. nam & ſecundæ ratio non fuerit abſimilis, & prima via in ſequentibus longe maximam utilitatem nobis afferet. Quamobrem theorematis argumentum ita habet. Sumamus latus octo & quadragintan-

dragint anguli cujus complemontum ad ſemicirculum dabitur 19957178464 quantarum diameter 10000000000, & quia hujus initium 199, ubi novem bis continuatur, ajo rationem diametri ad peripheriam ut minimum ad quatuor circulos, hoc eſt, ad decies milleſimam diametri partem veram dari: namque inde jam ante expreſſimus hos terminos ut 1 ad $3\frac{141592}{1000000}$. Eodem modo ſubtenſæ unius gradus complementum ad ſemicirculum eſt 19999238461, hic quatuor ſunt novenarij continui. ajo itaque ad minimum uſque ad octavum circulum rationem diametri ad peripheriam in primo modo pertingere, id enim jam ſupra illinc fuit exhibitum $3\frac{141592653}{1000000000}$. Ita ex inſcripta duorum minutorum cujus complementum ad ſemicirculum habet ab initio continuos ſeptem novenarios, quemadmodum ſupra patuit; Ajo per primum modum, rationem diametri ad peripheriam ſuam conſtanter produci ad circulos quatuordecim ut minimum. hæc enim inde ſupra inventa eſt $3\frac{34159,26535,89793}{100000,00000,00000}$. Denique, ut verba conferam in compendium, in vigeſimo nono primi ſyllabi propoſitionis primæ numero ſunt continui novenarii ſeptendecim; atque hinc datur ratio diametri ad peripheriam ut 1 ad $3\frac{1415926535897932384626433832795028}{10000000000000000000000000000000000}$, ubi ad quartum & triceſimum circulum omnia accurate veris characteribus conſentiunt. In his autem ſi noviſſimæ notæ unius unitatis auctariolum accedat, è veſtigiò terminus ille eſt major futurus juſto: Eadem inductio ex ſecundi diagrammatis analogia inſtitui poſſit. ego iſtis abunde ſatisfactum exiſtimo, cum adeò conſtans horum exemplorum inductio hujus veritatem comprobârit, cujus uſus poſtea erit illuſtrior.

CON-

CONSECTARIVM

Licet itaque hinc, quo uſque ratio diametri ad peripheriam bene accurate è ſingulis eruatur, quam proxime definire.

NAmque, cum per 31 propoſitionem conſtet; ſecundum modum priorem poſita diametro partis unius dari peripheriam $3\frac{14}{100}$; & è dodecangulo $3\frac{1415}{10000}$; è quatuor & vigintangulo $3\frac{1415}{10000}$. ex octo & quadragintangulo $3\frac{141592}{1000000}$; è ſex & nonagintangulo $3\frac{1415926}{10000000}$: atque ita porrò poſſint utcunque progreſſus æſtimari ex antecedente theoremate, hic per peripheriæ decimas & centeſimas progreſſum eum definiam. Atque ita conſtituo, Rationem diametri ad peripheriam ſecundum primum modum

A decangulo & ultra bene accurate definiri ut minimum ad taxationem diametri partium 100.

A quatuor & vigintangulo & ſupra non abeſſe unam diametri 10000.

A trigintangulo & ſupra non abeſſe unam 100000.

A quinquagintangulo & ſupra non abeſſe unam 10,00000.

A 100 tangulo & ſupra non abeſſe unam 100, 00000.

A 200 tangulo & ſupra non abeſſe unam 1000, 00000,

A 400 tangulo & ſupra non abeſſe unam 10000, 00000,

A 800 tangulo & ſupra non abeſſe unam 100000, 00000.

A 1600 tangulo & ſupra non abeſſe unam 10, 00000, 00000.

A 3200 tangulo & ſupra non abeſſe unam 100, 00000, 00000.

A 6400 tangulo & ſupra non abeſſe unam 1000, 00000, 00000.

A 12800 tangulo & ſupra non abeſſe unam 10000, 00000, 00000.

Atque ita porrò quantumlibet continuando. Vides hic in noviſſimo ad quatuordecim notas me tantum hanc rationem producere. Cum revera docuerim ſupra ex ſubtenſa duorum ſcrupulorum quæ totam peripheriam 10800 ambit, jam eandem rationem ad decimamquintam notam per primum modum bene accurate exhiberi. malui autem intra veritatis limites me coërcere. Et ſi de aliquo intermedio accuratius quidquam definire poſtules, neque illud utique per 32 propoſitionem erit arduum. Vt ſi quæratur de latere polygoni 499783 laterum, quam propè ad verum me ducat primæ factionis modus: video hunc numerum intercidere inter polygonum 262144 & 524288, prioris porrò complementum eſſe numerum decimumſeptimum in ſyllabo primo propoſitionis ſecundæ, atque illic novem novies continuo ordine ab initio iterari, quare tutò & fidenter pronunciabo ut minimum hinc rationem legitimis numeris produci ad circulum decimumoctavum. Atque ita porrò in reliquis analogia conſimili. quod omnino annotaviſſe operæ pretium fuit viſum. Sed geometricam factionem ad circuli peripheriam ſua parabilitate & ἀκριβείᾳ arithmeticæ æmulam hic ante expediam, quam ad reliqua progrediar.

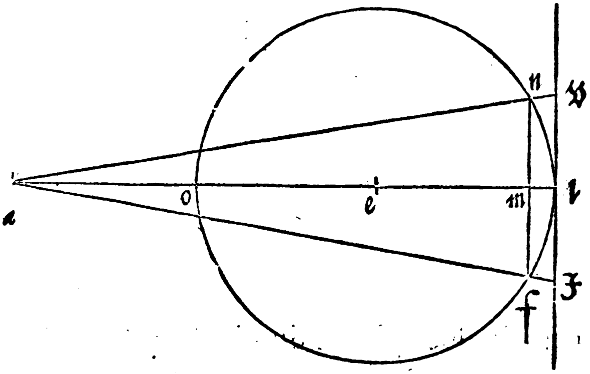
PROPOSITIO XXXIII.

Lineam datæ peripheriæ quam libet proximè æqualem exhibere.

HVjus fabricæ utilitatem ex theoremate 31 repetere haud eſt difficile, & cum duæ illic viæ proponantur altera

altera per datæ peripheriæ triſectionem, ut recta inter convexum & diametrum continuatam radio ſit æqualis, altera ut diameter radio æqualiter continuetur, nos utramque pro ſua parabilitate hic adhibebimus. Et quidem ab hoc noviſſimo facto initio.

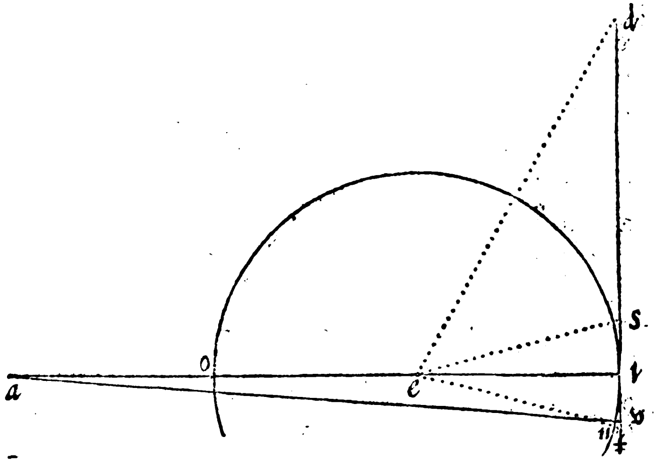
Exponatur itaque circulus *onf*, cui recta poſtuletur æqualis; inſcribito ei latus ſexanguli *nf*, idque à diametro *io* biſecetur in *m*, atque continuetur radio æqualiter in *a*: hinc in altro diametri termino *i* recta *vj* circulum contingat. tumque rectæ ab *a* per *n* & *f* eductæ ab ea intercipiant rectam *vj*. ea peripheriâ *nif* minor & proximè æqualis erit; atque ideo eadem ſexies iterata totã circumferentiam proximè æquabit. Id enim propoſitione 31. eſt demonſtratum, hac via dari rationem diametri ad peripheriam quæ 1000 ad 3140. quę tam propinqua è veræ eſt quam Archimedea vulgaris 7 ad 22: nam ea exhibet 3142. Cum veræ proxima ſit 3141. Hæc prima eſto & leviſſima in minimis etiam circulis factio, & ad eorundem mechanicen aptiſſima.



Eâdem viâ ſi *nf* ſit latus inſcripti dodecanguli, erit *vj* æqualis duodecimæ parti totius peripheriæ, cujus duodecuplum totam peripheriam ut proxime æquabit. erit enim ratio quæ 10000 ad 31415, cum veræ proxima ſit ut 10000 ad 31415 $\frac{9}{10}$ ut ita ne quidem $\frac{1}{10000}$ diametri abeatur à vero:

cujus ideo mechanicem concinnitate quadam juvabo.

Sit igitur expoſitus circulus *oſn*, quem in *i* contingat recta *id*, & ſit per centrum recta infinita *oi*: inde ex *e* centro *ea ed* rectæ, & ipſa *dt* diametro conſtituantur æquales, & connectatur *et*, quæ peripheriam ſecet in *n*; recta ab *a* per *n* tangenti occurrens in *v* abſumet ſegmentum tangentis *vi* peripheriæ *ni* ut proximè æquale. Eſt autem *ni*



pars ſemiperipheriæ duodecima, & totius viceſima quarta. ſtatuatur enim *ſi* ipſi *ti* æqualis. habebunt itaque æquicrura triangula *edv ves*, communem angulum ad *v*, atque ideò erunt ſimilia. cumque *ed* ſit dupla *ei*, etiam *dt* poterit triplum ipſius *ei*; quare *edi* triangulum erit dimidium trianguli æquilateri: atque *edi* ideo $\frac{1}{3}$ recti; & *sev* huic æqualis itidem fuerit recti $\frac{1}{3}$, & quatuor rectorum $\frac{1}{24}$. atque ideo *iv* quatuor & vicies ſumpta dabit rationem diametri ad peripheriam quæ 10000 ad 31415. Si propius ad verum poſtules accedere aſſumatur in primo diagrammate *nf* latus inſcripti quatuor & vigintanguli. & dabitur ratio quæ 100000 ad 314158$\frac{7}{10}$, cum vera ſit 314159$\frac{2}{15}$.

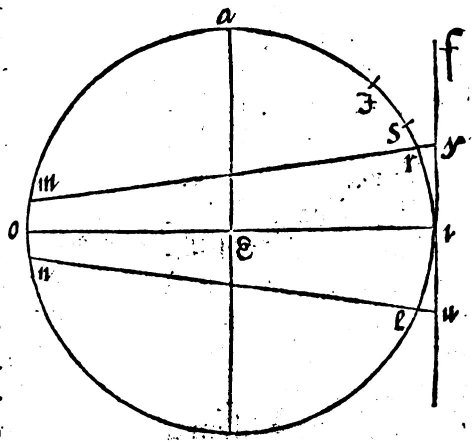
Si verò

Si verò majuſculus detur circulus ut *nf* commodè ſit latus octo & quadragintanguli, dabitur *vj* pars quadrageſima octava peripheriæ, & inde tota; ut ratio diametri ad peripheriam hinc exſurgat accurata quæ 1000000 ad 3141592. quod profectò ante hac ex ulla alia mechanice ſperare improbum videri poterat.

Vt ſi concipiamus circulum cujus diameter ſit centum miliarium, hac via in ejus ambitu non peccetur $\frac{1}{10000}$ milleſima unius miliaris. miliare autem noſtrum horarium habet pedes 18000. unde efficitur in toto ambitu definiendo non integris duobus pedibus hoc modo erratum. Quamobrem aliqua antecedentium factionum in quacunque tandem mechanice ſatis erit oportuna.

IDEM ALITER.

SEd & è ſecunda 31 propoſitionis factione, haud minus cõcinnam mechanicen derivare nobis haud erit arduum. Sit igitur circulus *aoi* diametris normalibus diſſectus, & ſit *as* totius peripheriæ ſexta & *ir* pars decimaſexta, atque ideo *sr* pars quadrageſima octava: huic autem ſtatuatur æqualis *om*, & ſit tangens *if*. recta *mr* tangenti occurrens abſumet *iy*, ea erit proxime major ipſa *ir* peripheria. eſtque *om* tertia pars peripheriæ *ir*. atque ita altrinſecus aga-

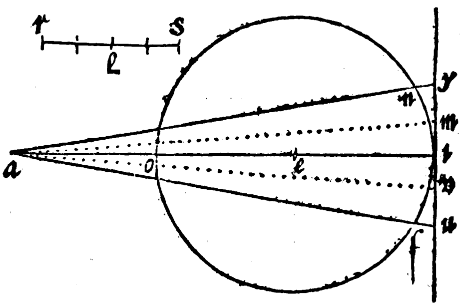


tur *nu*: quare tota *uy* æquabitur octanti totius, & duplum quadranti. datur autem hinc ratio diametri ad peripheriam quæ 10000 ad $31416\frac{3}{10}$. Sed illa quæ per inſcriptionem dodecanguli abſolvitur è mechanice priore, ut faciliima, ita huic certitudine vix cedit.

PROPOSITIO XXXIV.

Datæ rectæ æqualem peripheriam è dato circulo abſumere. & contra.

ID nunc primum in lineis infra etiam in numeris expediam. Eſt autem iſta mechanice ex antecedente propoſitione ſatis expedita. Detur recta *sr* cui æqualis peripheria ſit abſumenda è circulo *oi*. Hic primum illud expendendum data linea radione ſit major an minor, & quam benè proximè vero iſtam lineam cupias expreſſam, ita enim vel tota ſimul, vel per partes tantum poterit adhiberi. Vt ſi detur recta *rs* radio circuli æqualis, ſi ea biſariam dividatur in *l*, & biſegmento utrimque à



puncto contactus in tangente ſtatuantur æquales *iy iu*, & continuatio diametri a *ao* radio ſit æqualis, recta ab *a* in terminos *uy* abſumet peripheriam *nif* æqualem rectæ *uy*, vel datæ *rs*, & id quidem tam proximè quam ſinet ratio dia-

metri

metri 100 ad peripheriam 314. Si accuratius id ipſum exhiberi poſtules. biſecentur ipſa biſegmenta in *v* & *m*, & ab *a* adjungatur rectæ *am*·*av*, eæ intercipient peripheriam æqualem *nv*, qui ſemiſſis eſt totius *uy*, & quidem tam proximè quam ſinet ratio diametri 10000 ad peripheriam 31415, & propius eo, Atque ita porro. res ex analogia 31 & 33 propoſitionis eſt manifeſta. Si linea major radio detur, toties iſta biſectio iterari poterit; quoad ſatis prope ad optatam rationem acceſſeris, ut ſi linea diametro detur æqualis, prima biſectione radio, ſecundâ dimidio, tertiâ quadranti æqualis conſtituetur atque inde jam non una decies milleſima diametri parte aberis à vero. ſi forte in nimium minutas partes concidatur continua biſectione, utere primum parte tertia, eamque biſecato ſi ſit opus. non poteſt operoſum videri qui regulâm & circinum modo tractare didicit. Sed & datæ peripheriæ recta æqualis dari poteſt. nam cum *nif* erit pars ſexta totius, biſecetur in *i*, recta *uy* erit æqualis parti ſextæ in ratione 100 ad 314. ſi propius velis biſeca utrumque biſegmentum dabitur *mv* æquale parti ejus dimidiæ. idque duplicatum toti erit æquale. Hinc idem in majoribus minoribuſve peripheriis ſimili analogia exprimi haud difficulter poterit.

Præſtat itaque noſtra factio etiam ἀμηχανῶς, quod ab aliis fruſtra exigas, aut demum curioſa & anxia delineatione vix tandem, neque ita accurate exprimas. Nam qui ideo ad veterum helicas confugerunt, eiſque novum ſchema circumdederunt, nimis ſecurè operam ludunt: cum earum delineatio non minus moleſta, quam uſus ſit periculoſus.

PROPO-

PROPOSITIO XXXV.

Datam peripheriam data ratione ſecare.

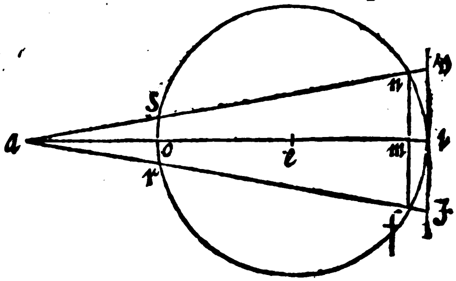
ID poſtea etiam in numeris præſtabitur quam accuratiſſime, nunc linearum mechanicen tantum conſectamur. fuerit autem hoc ipſum ex antecedenti theoremate haud operoſum. cum enim rectam aliquam lineam datæ peripheriæ per propoſitionem 34 poſueris æqualem, eâ in optatas partes aut ſecundum datam rationem diviſâ, tum iſtis partibus rurſum æquales peripheriæ per eandem propoſ. conſtitui poterunt. atque ita data peripheria ſecundum datam rationem erit ſecta. Et ſi tota major ſit quam ut ſimul unicâ factione voto ſatisfaciat, aſſumantur partes ejus dimidia, tertia, quarta & cæteræ, quibus peripheria conſtituatur æqualis, eædemque peripheriæ toties iteratæ optatæ rationis terminum exhibebunt. Poſſet hac via quoque figurarum ordinatarum adſcriptio explicari; ſed illarum major utilitas ad abacos logiſticos in numeris poſtea redundabit. mechanice autem per circinum quem *proportionum* vocant tunc fuerit expeditior. quamobrem hic manum de tabula aliquando tollendam exiſtimo.

PROPOSITIO XXXVI.

Datæ inſcriptæ debitam peripheriam tam veræ propinquam in numeris exhibere, quam erit ratio diametri ad ſuam peripheriam data.

PRopoſitione ſecunda & triceſima ejuſdemq; conſectario ſatis clarè jam fuit à nobis demonſtratum, ſi ao continuatio

tinuatio radio ſtatuatur æqualis & *nf* inſcripta lateri ſexanguli, tum *nif* peripheriam rectæ *vj* reſpondere quantarum diameter aſſumetur ſpatium 100; et ſi *nf* ſit latus dodecanguli, in partibus 10000; ſi *nf* ſit latus trigintanguli in partibus 100000; ſi ſit latus duodequinquagintanguli in partibus 1000000; ſi ſit latus ſex & nonagintanguli in partibus 10000000, ſi ducentanguli in partibus 100000000, atque ita porrò. cujus explicatio à 32 propoſitione & ejuſdem conſectario dependet. quod ſi itaque inſcripta detur æqualis radii dimidio, ea minor erit latere dodecanguli, atque ideò poſita diametro 10000, ejus veritas ut minimum ad hos numeros reſpondebit. ſi *nf* detur æqualis parti



centeſimæ ipſius radii, tum inter *vj* & *nif* nulla intercedet differentia, diametro etiam 100, 00000 partibus taxata. Atque ita continuo ordine ſecundum expoſita in reliquis procedendo. Eſto igitur inſcripta *nf* partium 14572, quantarum radius 1000000, quæritur in quot radii milleſimis peripheria ei congrua bene accurate explicari & inveniri poſſit, idque nulla alia circumitione aut περιεργία. Experire quota hæc radii ſit pars, iſta hic eſt fere $\frac{1}{689}$, atque ideò inſcripta iſta minor multò latere polygoni 689 laterum; atqui è conſectario propoſitionis 32 conſtat à quadringentangulo, & ſupra, ad novem circulos adſcriptam *vj* peripheriæ *nif* bene accuratè congruere, ab octingentangulo autem ad decem. quare planum eſt hic ad veritatem etiam ultra nonum circulum accedi. Itaque ſi quis infra decimum circulum à me hujus conſenſum exigat nihil me erraturum intelligo. ſive radius ponatur partium

10000, vel 100000, vel 1000000, vel 10000000, atque ita porrò, quorum extremus & ultimus hic ſit 10000000000. Cujus inveniendi via hæc eſt; ſit *nf* inſcripta 14572, ejus dimidium *nm* 7286 poſito radio 10000000, vel poſito radio 1000000000, tum ſinus *nm* fuerit 7286000. erit itaque ſinus complementi 9999997346 ut proxime. Hinc proportio, ut *am* 2999999346 ad *nf* 14572000, ita *ai* 30000000000 ad *vf* 14572001 $\frac{2}{10}$. atque adeò tantam ajo eſſe peripheriam *nif* poſita diametro 20000000000. tantillo utique ſua inſcripta majorem. Quam ſi ad gradus, ſcrupula, & ſcrupulorum partes revocare expetas, id adeò haud erit operoſum. ut enim tota peripheria 62831853071 ad hanc ſuam partem 14572001, ita 360 gradus $\frac{83492}{1000000}$ ut proximè, quæ efficiunt 0 gr. 5 ſcr. 0 ſec. 34 $\frac{27}{100}$ tert. ſi canonis ſinuum leges ſequaris invenies hanc inſcriptam ſubtendere peripheriam 0 gr. 5 ſcr. 0 ſec 34 $\frac{15}{100}$ tertiorum. atqui certum eſt tantillo hic tabularum rationem per differentiarum conſuetum epilogiſmum à vero deficere. cum hæc ipſa, ea qua docui via, ut minimum ad 1000,00000, 00000 partes ne hilum quidem peccet. & hic non ultra decimum circulũ adhibuerim. eſt enim ſupra demonſtratũ ex inſcripta duorũ ſcrupulorũ ad quindecim circulos nihil peccari; atq; inde in quatuor ſcrupulis ad quatuordecim perveniri; in octo ſcrupulis autẽ, ad tredecim conſtans ratio eſt.

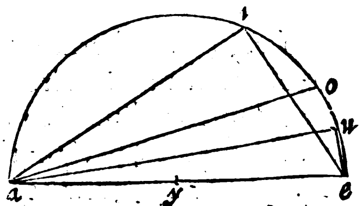
Atqui ſi peripheriæ veritas etiam in pluribus notis poſtuletur, quam ſimplici hac via præſtari poſſit, tum ſecundi theorematis uſus huc tibi quoque erit advocandus. Exemplum tale eſto. Detur inſcripta 1391547041o. quantarum diameter 200000, 00000. & quæratur peripheria huic inſcriptæ debita. Principio cum inſcripta expoſita ad latus inſcripti quadrati proximè accedat, certum eſt peripheriam ei debitam quadrante minorem eſſe; ſi vero ma-

Digitized by Google

jor eſſet quadrante ejus complementum pro ipſa huc ad vocarem, porrò autem cum ex inſcripta dimidii gradus ratio diametri ad ſuam peripheriam in decem notis demum accurata exſculpi poſſit, video mihi hanc peripheriam proximam tantiſper concidendam, ne hinc quidquam lubrici nobis ſuboriatur. Atque ita agam

90 gr.	
45 gr.	
22 gr.	30 ſcr.
11 gr.	15 ſcr.
5 gr.	37 $\frac{1}{2}$ ſcr.
2 gr.	18 $\frac{3}{4}$ ſcr.
1 gr.	98 $\frac{3}{8}$ ſcr.
0 gr.	34 $\frac{11}{16}$ ſcr.
0 gr.	17 $\frac{11}{32}$ ſcr.

quamobrem octava biſectione ad ſcrupuli unius quadrantem ut proximè eſt deventum. & ideo peripheria datæ inſcriptæ debita etiam poſt octavam biſectionem iſtac eſſet minor. vides itaque opus primæ & ſecundæ propoſitionis huc advocandum. ſed ne operis varietas noviſſimas notas in errorem impellat; opus ipſum ad taxationem diametri duodecim circulorum inſtituam, quas binas redundantes notas, ut abundantes, ad extremum deteram. Eſto jam nobis ſemicirculus *aei* cui inſcribatur *ei*, atque datæ ſubtenſæ magnitudinem referat nempe 1, 39154, 70410, ad taxationem radii 100000, 00000, vel 139, 15470, 41000 ad taxationem radii 100, 00000, 00000. hinc in iiſdem partibus dabitur inſcripta complementi *ai* 143, 65224, 78942. biſecetur deinde peripheria *ei* in *o*, ſitque inſcripta com-



plementi *au*; atque id ita octies hoc caſu continuatum intelligatur. Iam per propoſitionem ſecundam, ſi rectam ex inſcripta *ai* & *ae* diametro per radium multiplices, facti latus erit inſcripta *ao*, quæ ſubtendat peripheriam *ai* & præterea *io* reliquæ dimidium. addantur itaque *ae* & *ai*, harum ſumma 3391547041000, per radium 1000000000000 multiplicata efficiet 3391547041000000000000000 quadratum inſcriptæ *ao*, quæ hinc longitudine datur 1847759065022. ſecundo ſi hæc inventa ad diametrum addatur, ſumma per radium multiplicetur, facti latus 1962994895622 repræſentabit inſcriptam *au*, quæ ſubtendit peripheriam *aio* & præterea *ou* ſemiſſem reliquæ *oue*. atque ita ſimili modo continuando dabitur 1990755185434 complementum tertiæ biſectionis: hinc complementum quartæ biſectionis 1997687459398: tum quintæ 1999421781265: inde ſextæ 1999855440092; dehinc ſeptimæ 1999964440252: denique etiam octavæ biſectionis complementum 1999990964903, in quo novem ab initio quinquies continuatur, quod ex argumento propoſitionis 32 indicio eſt, hic peripheriam à ſua recta ad radium decem circulorum nequidem unico charactere peccare, ſed eatenus ad amuſſim conſentire. Etſi forſan in ſeptima biſectione nihil ad decimam uſque notam veritati deceſſiſſet, malui tamen in illam partem peccare, ut hoc exemplo numerorum ſecuritati caveatur. ſed iſtos numeros brevi ſyllabo complectar.

	Data inſcripta cujus peripheria quæritur.	13915470410.00
	Ejus complementum ad ſemicirculum	14365224789.42
1.	Inſcripta complementi dimidiæ peripheriæ quæſitæ	18477590650.22
2.	Inſcripta complementi $\frac{1}{4}$ peripheriæ quæſitæ	19629948956.22
3.	Inſcripta complementi $\frac{1}{8}$ peripheriæ quæſitæ.	19907551854.34

Inſcripta

4. Inſcripta complementi $\frac{1}{16}$ peripheriæ quæſitæ		19976874593.98
5. Inſcripta complementi $\frac{1}{32}$ peripheriæ quæſitæ		19994217812.65
6. Inſcripta complementi $\frac{1}{64}$ peripheriæ quæſitæ		19998554400.92
7. Inſcripta complementi $\frac{1}{128}$ peripheriæ quæſitæ		19999638596.96
8. Inſcripta complementi $\frac{1}{256}$ peripheriæ quæſitæ		19999909649.03

Porrò ſi jam ſeptimæ biſectionis complementum 19999638596962 de diametro 20000000000000 deducas, & reliquum 36140304 per radium multiplices, hujus facti 36140304000000000000 latus 6011680630 erit per propoſitionem primam complementum biſectionis octavæ quantarum radius 10000000000000. & detritis noviſſimis duabus notis, quæ lubricæ ſunt, erit ea 6011680630, quantarum radius 10000000000 initio erat propoſitus. His ita conſtitutis repetatur diagramma hujus propoſitionis primum, ſitque illic *em* dimidium octavi complementi ad ſemicirculum 9999954824, & tota *am* 29999954824, & *nf* ſit inſcripta octavæ biſectionis paulo ante inventa 6011680630. unde proportio inſtituatur ut ante. quemadmodum *am* ad *nf*, ita *ai* radii triplum ad *vj* 6011689680, cui æquatur peripheria *nif*. Eſt igitur *vj* $\frac{1}{256}$ peripheriæ ad quam pertinet inſcripta data. quare iſte numerus per 256 multiplicatus dabit nobis optatam peripheriam datæ inſcriptæ debitam, ad optatam diametri decem circulorum taxationem 15389925658. Atque inde facile erit ſi libebit eandem peripheriam ad gradus, minuta, ſecunda, etiam tertia & quarta revocare. Vt enim 31415926536 circuli ſemiperipheria ſecundum hujus ſemidiametri taxationem, ad inventam peripheriam 15389925658: ita 180 gradus ad $88\frac{1777788254}{10000000000}$. qui ſunt 88 gr. 10 ſcr. 40 ſec. atque ita porro in cæteris omnibus analogia conſimili.

Cæterum ut te iſto reductionis opere abſque difficultate ex-

te expedias, & datos gradus atque minuta in peripheriam, ad taxationem radii particularum 10000000000; vel contra, datam ſecundum hanc æſtimationem peripheriam in gradus & minuta reducas canonion hoc tanquam πρόχειρον hic ſubtexu. tu ſi ita expedire videatur & jam ad majorem radium idem hoc & in majoribus numeris producito.

grad.	*peripheria*	*min*		*ſec.*	
1	174,532,925	1	2,908,882	1	48,481
2	349,065,850	2	5,817,764	2	96,963
3	523,598,776	3	8,726,646	3	145,444
4	698,131,701	4	11,635,528	4	193,925
5	872,664,626	5	14,544,410	5	242,407
6	1,047,197,551	6	17,453,292	6	290,888
7	1,221,730,476	7	20,362,174	7	339, 370
8	1,396,263,402	8	23,271,057	8	387, 851
9	1,570,796,327	9	26,179,938	9	436, 332
10	1,745,329,252	10	29,088,821	10	484,814
20	3,490,658,504	20	58,177,641	20	969,627
30	5,235, 987, 756	30	87,266,462	30	1,454, 441
40	6,981, 317, 008	40	116, 355, 283	40	1, 939, 255
50	8,726,646,260	50	145, 444, 104	50	2,424,068
60	10,471, 975, 512				
70	12, 217, 384, 764				
80	13,962,634,016				
90	15,707,963, 268				
180	31, 415, 926, 536				

Vſus ignotus omnino eſſe non poteſt. Vt ſi quæratur inventa peripheria 1538992565 8, quot gradibus & minutis reſpondeat. hic primum conſtat eam eſſe quadrante minorem,

norem, majorem tamen gradibus 80; qua peripheria ſubducta reliqua eſt peripheria 1427291642, major 8 gradibus & relinquuntur 31028240, quæ major eſt 10 ſcrupulis, unde reliqua fiunt 1939419 quæ, peripheria æquat 40 ſecunda, ut proxime. formula operis ita habet.

	15389925658
gr. 80.	13962634016
	1427291642
gr. 8.	1396263402
	31028240
ſcr. 10.	29088821
	1939419
ſec. 40.	1939255
	164

Atque hinc viciſſim data peripheria in gradibus ſcrupulis & ſecundis, peripheria ipſi debita ſecundum expoſitam diametri taxationem inveniri poſſit. res exemplo non eget, cum ex analogia expoſita per ſe ſit manifeſta.

Adeo grandes numeros adhibui, ut exemplo oſtenderem, ſi fortè etiam ejuſdem peripheriæ quantitatem ad majorem diametrum, & in plures circulos conciſſum uſurpari opus ſit, quomodo tutò & ſecurè eò deveniri poſſit. fere enim, ubi biſectiones crebriuſculæ erunt adhibendæ, nota una aut altera diameter auctior erit aſſumenda, quas notas poſtea recidas. Sed hæc ſi quando ſumma λεπτολογία erit inſtituenda; alias, cum nulla tantæ diligentiæ cauſa ſuberit, etiam minore labore iſtoc opere defungi poſſis.

Quamobrem ad peripheriam dato ſinui debitam inveniendam, abſque nullo canonum triangularium ſubſidio πρόχειρον & compen-

compendium utiliſſimum hinc derivari poſſit quod in ſcrupulis primis ne quidem hilum peccet. Cum enim è latere trigintanguli ratio diametri ad peripheriam in quinque circulis legittima detur, ſinus autem è radio quinque notarum ad ſcrupulorum primorum ſemiſſes & quadrantes ſatis accurate dentur. etiam nos ex iſto theoremate rem haud difficulter deducemus.

Principio enim omnibus datis ſinibus, qui non majores erunt dimidio trigintanguli latere vel ſinu 6 *gr. Eſt autem hoc latus inſcriptum majus quinta radii parte, & dimidium decima ejuſdem. quamobrem in omnibus ſinibus non majoribus decima radii parte veritas peripheriæ unica proportione concludetur, & inde amplitudo optata in gradibus & minutis dabitur. Exemplum tale eſto. detur ſinus* 958457, *quantarum radius* 10000000, *quaritur peripheria eidem debita. ſit in figura antecedente is ſinus* nm, *ejus quadrato de diametri quadrato ſublato dabitur ſinus complementi ejus* em 9953962: *fiat itaque ut* em *plus diametro, id eſt tota* am 29953962, *ad* mn *datum ſinuum* 958457, *ita tres radii* 30000000 *ad* iv, *hoc eſt* in *peripheriam* 959930. *quare fiat ut* 3141592 5 *ſemiperipheria ad* 959930 *inventam, ita* 180 *gradus ad* $5\frac{49999}{100000}$ *gradus hoc eſt* 5 *gr.* $29\frac{999}{1000}$ *ſcr. cum is ſinus ſit* 5 *gr.* 30: *ſcr. ut hic non una milleſima unius ſcrupuli ſit peccatum. Et qui potuit propius ad verum ipſum adiri, cum tabulæ ipſæ in ultima nota defectu aut exceſſu aliquo minimo peccent?*

Quin adeò, cum è quatuor & vigintangulo ratio diametri ad peripheriam iſta detur quæ 100000 *ad* $314158\frac{1}{10}$, *cum debeat eſſe* $314159\frac{2}{10}$ *vides hic non integra unitate errari in tota: quamobrem jam inde infra quartam ſemiradii partem ſinuum peripheriæ ad ſcrupulorum etiam ſextantes accurate inveſtigabuntur. Si majores dentur huc erunt revocandæ. Vt ſi detur* 9945219, *is cum propemodum radio ſit æqualis, inveniam ſinum dimidiæ peripheriæ, ut ſupra de inſcriptis docui,* 6691306, *& rurſum* 3583679, *deinde* 1822355, *denique* 915016, *hic minor eſt quarta im*

quant

quinta parte dimidii radii, atque ideo quemadmodum antea eſt conſtitutum hic deſinam, & ejus complementum inveniam, videlicet 9958049, cui diameter addita dabit 29958049. hinc proportio ut ſupra, quemadmodum 29958049 ad 915016, ita 30000000, ad peripheriam huic ultimæ ſinui debitam 916297$\frac{1}{2}$, cujus ſedecuplum exhibet peripheriam dato ab initio ſinui debitam 14660760.

Hinc igitur fiat ut 3141592 5 ad inventam peripheriam 14660760, ita 180 gradus ad 83$\frac{99971}{100000}$ gr. vel 83 gr. 59 ſcr. 58$\frac{9}{10}$ ſec. cum hunc numerum ab initio propoſitum 9945219 exacte è tabulis pro ſinu 84 gr. aſſumpſerim. ſed is error è calculi continuatione obrepſit in fine. neque tamen unum ſecundum ſcrupulum excedit.

Hinc igitur conſtat maximi etiam cujuſque ſinus peripheriam ad ſecunda uſque poſſe accurate explicari, quatuor radicum extractionibus ob biſectiones, & una ad complementi inventionem, denique duabus diviſionibus. nam minutulas per unam aut alteram notam multiplicationes in hunc cenſum non advoco.

Si ſit ſinus 45 gr. non major, tribus ob biſectionem extractionibus, & una ad complementi inventionem, & denique diviſionibus duabus.

Si ſit ſinus non major 22 gr. 30 ſcr. duabus extractionibus ob biſectionem, una ad complementi inventionem, & diviſionibus duabus.

Si ſit ſinus non major 11 gr. 15 ſcr. unica extractione ad biſectionem, unica ad complementi inveſtigationem, & diviſionibus duabus.

Si ſit ſinus datus non major 5 gr. 37$\frac{1}{2}$ ſcr. unica ad complementi inventionem, & diviſionibus duabus.

Quamobrem Canonicis triangulorum tabulis deſtituto hoc eſt epichirema nobiliſſimum, & quoad ejus fieri poteſt breviſſimum, ut tam accuratè tamen dati ſinus peripheriam exhibeas, quam ipſa tabulæ. Inventum ſanè ab omnibus ſemper deſideratum: ſed à nemi-

Digitized by Google

à nemine hactenus utiliter aut feliciter explicatum. Et quidem quod magis mirere ex ipſa ratione diametri ad ſuam peripheriam.

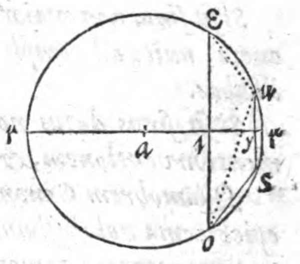
Neque ad modum difficile fuerit tangentes & ſecantes ad eaſdem leges revocare. Etenim non obſcurum eſt quomodo data tangente ejuſdem peripheriæ ſinus inveniatur. atqui ex dato ſinu peripheriæ quantitatem nunc explicatam habes. Idem de ſecantibus judicium eſto.

Sed Archimedæam ἀκρίβειαν & diligentiam imitari etiam hic libet, ut in rebus majoris momenti præciſè conſtet ſecundum majorem & minorem terminum, quæ peripheria datæ adſcriptæ debeatur. quam ad rem hujuſmodi lemma prævium concipio.

LEMMA, *ad id quod ſequitur.*

Triens ſinus datæ peripheriæ minor eſt ſinu trientis datæ peripheriæ.

SIt peripheria *euo*, cujus trientes *eu, us, so*; & ſunto inſcriptæ iis ſubtenſæ itemque *ou*. quare *oe* minor eſt quam *eu* & *uo*; & *ou* minor quam *us* & *o* atque ideo *oe* multò minor quam *eu us so*. & propterea quoque *ei*, dimidia *oe*, minor omnium ſemiſſibus, hoc eſt triplo *uy*. Ptolomæus generaliter illud demonſtravit lib. 1. c. 9. majorem eſſe rationem peripheriarum quam inſcriptarum: unde hoc quoque nobis aſſumere licuit; cum *euo* tripla ſit peri-



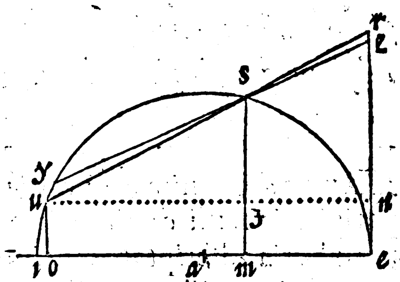
pheriæ

pheriæ *urs*, inſcriptam *eo* minorem eſſe tripla *us*; ſed ſpeciale iſtud Lemmation hic nobis ſufficiet.

PROPOSITIO XXXVII.

Si duorum ſinuum utrimque à centro eidem diametro perpendicularium ille hujus ſit triens, recta per eorum vertices lineæ in hoc diametri termino tangenti occurrens abſumet ſegmentum tangentis majus peripheria ſibi contigua.

IN ſemicirculo *esui* ſit *uo* ſinus, triens ipſius *ms*, & ſit contingens *el.* ajo rectam *usr* abſumere è contingente ſegmentum *er* majus peripheria *es*. Sit enim *iuy* peripheria triens peripheriæ *es*, & ideo major quam *iu* per lemma premiſſum. recta ab *y* per *s* continuata, donec tangenti occurrat in *l*; abſumet ſegmentum *el* majus peripheria *es* per propoſitionem 29, quare *er* eadem *es* multo erit major.



Hinc adeò dato ſinu dabitur peripheria major quam ipſi competat. ut in noviſſimo antecedentis theorematis exemplo ubi poſtulatur peripheria debita ſinui 9945219; *illic poſt quartam biſectionem deventum eſt ad ſinum* 915016, *is igitur eſto ſinus* sm; *hujus triens* uo 305005: *ſinus complementi* sm *eſt* am 9958049; *ſinus complementi* uo *eſt* ao 9995347: *quare tota* om *ſive*

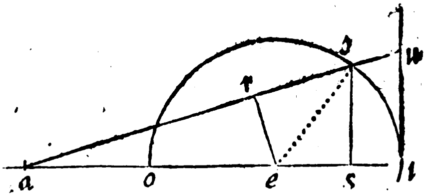
uj *dabitur* 19953396; *datur autem* sj *bes ipſius* sm, *vel dupla ſinus* uo 610018. *Cum igitur triangula* ujs unr *ob paralleſimum laterum* sj nr *ſimilia ſint, erit quemadmodum* uj 19953396 *ad* js 610011, *ita* un 19995347 *ad* nr 611293½; *hac ad* en *addita dabit totam* er 916298½ *majorem peripheria* es; *quin & er per propoſitionem* 30 *daretur* 916297 [illegible] *itidem major dicta peripheria* es. *peripheria autem proxime minor theoremate præmiſſo eſt inventa* 916297½. *vides itaque quam parum hæ notæ ad taxationem radii* 10000000, *à ſe mutuo abludant, ut vix unica unitate inter ſe diſtent; & id quidem in ſinu* 5 *gr.* 15 *ſcr.*

PROPOSITIO XXXVIII.

Data cuicunque peripheriæ inſcriptam vere tam propinquam in numeris exhibere, quam erit ratio diametri ad ſuam peripheriam data.

HIc alter noſtræ cyclometrices fructus eſt longe utiliſſimus: ut enim propoſitione 36 & 37 ex adſcripta data peripheriam illi debitam anquiſivimus; ita hic contra ex peripheria adſcriptam ejus indagamus. Poſtuletur enim latus inſcripti *millanguli*. Exponatur itaque ſemicirculus *oyi*, & detur *yi* peripheria pars totius circumferentiæ biſmilleſima; ſitque *ao* intervallum radio æquale, & ad *i* reliquum diametri terminum excitetur perpendicularis circulum contingens *iu*, hinc recta ab *a* puncto per *y* educta occurrat tangenti in *u*. Iam per propoſitionem 28 & 31 *ui* proximè minor erit peripheria *iy*. & quia *iy* pars eſt totius biſmilleſima, illæ inter ſe ad diametri particulas 10000000-

00, ut



oo, ut minimum conſentient per conſectarium propoſitionis 32. ſit itaque ſinus *ys* diametro *oi* perpendicularis, & à centro recta *er* perpendicularis in eductam *au* demittatur. Iam *iy* vel *iu* pars circumferentiæ biſmilleſima poſito radio partium 100000, 00000 erit 62831853. eſt autem tota *ai* earundem 300000, 00000. Hinc cum *aiu* triangulum ſit rectangulum, & *ai* *ui* crura anguli recti dentur, dabitur quoque ejuſdem baſis *au* 30000016449. Hinc ob ſimilitudinem rectangulorum triangulorum *aui aer* erit, ut *au* 30000016449 ad *ui* 62831853, ita *ae* 20000000000 ad *er* 20943939. Inde è differentia quadratorum ab *ae* & *er* dabitur *ar* 19999989034: & è differentia quadratorum ab *ye* & *er* dabitur *ry* 9999978067. atque hinc tota *ay* 29999967101. Denique ob ſimilitudinem triangulorum *aer ays* erit, quemadmodum *ae* 20000000000 ad *er* 20943939, ſic *ay* 29999967101 ad *ys* 31415874, cujus duplum 62831748 latus inſcripti millanguli. certè poſita diametro 2000, 00000, 00000, idem eſſet partium 62831749717 minus vero, & 62831949718 majus vero. vides itaque illic tantum in ultima nota commiſſum. atque ideo ſi major aliqua diligentia requiratur diametrum una aut etiam altera nota majorem uſurpandam, ne ille error ad optatos limites proſerpat.

Atque ita quidem in iſto nobis exemplo nulla fuit objecta mora, quo minus è veſtigio inſcriptam imperatam aſſecuti ſimus. id enim ob peripheriæ exilitatem manifeſtum erat ſecundum poſitas leges iſta exploranti omnino ſequi debere. at verò ſi peripheria detur majuſcula, cujus inſcripta ad eandem radii taxationem 100000, 00000 poſtu-

 letur,

letur, qualis ſit nobis ea quæ 81 gr. 46 ſcr. 40 ſec. ſubtendit, hæc poſt ſeptimam biſectionem devolvetur ad 0 gr. 38 ſcr. 20 ſec. ut hic vides.

81	gr.	46	ſcr.	40	ſec.
40	gr.	53	ſcr.	20	ſec.
20	gr.	26	ſcr.	40	ſec.
10	gr.	13	ſcr.	20	ſec.
5	gr.	6	ſcr.	40	ſec.
2	gr.	33	ſcr.	20	ſec.
1	gr.	16	ſcr.	40	ſec.
0	gr.	38	ſcr.	20	ſec.

Hic igitur ne quis error lubricitaſve extremæ notæ ex operis hujus multiplici varietate nobis obrepat, utar diametro duabus notis majore 200, 00000, 00000. ad iſtam taxationem 0 gr. 38. ſcr. 20 ſec. valent 11150714665; hujus igitur dimidium eſto recta *ui* 5575357332. quare in triangulo rectangulo *aui* datis cruribus *ai* 300,00000,00000 & *ui* 5575357332 dabitur baſis *au* 300000518 0764. & ob ſimilitudinem erunt *au* 300000518 0764, *ui* 5575357332, *ae* 2000000000000, & *er* 37168 98469 latera proportionalia. porrò autem ex differentia quadratorum *ae* & *er* dabitur quoque *ar* 1999996546163: itemque ex differentia *ye* & *er* dabitur *yr* 999993092309. unde tota *ay* conflatur 2999989638472. denique ob ſimilitudinem *aer ays* triangulorum dabitur *ys* 5575328447 ſinus 0 gr. 19 ſcr. 10 ſec. atque ideo eadem *ys* duplicata dabit inſcriptam 0 gr. 38 ſcr. 10 ſec. 11150656894. Hinc, ut deinceps inſcripta optata 81 gr. 46 ſcr. 40 ſec. inveniri poſſit factio è propoſitionis ſecunda nobis erit deducenda, & complementum dati numeri erit inveniendum, quæ inſcripta eſt 179 gr. 21 ſcr. 40 ſec. 199,99689,15472. hujus qua-

jus quadratum 3999875662854247880982784 per radium 1000000000000 diviſum dabit 3999875662854. hinc diameter 2000000000000 deducta relinquet 1999875662854 inſcriptam ſubtenſam datæ peripheriæ minus ſuo complemento, hoc eſt 178 gr. 43 ſcr. 20 ſec. Inde eadem formula dabitur ſubtenſa 178 gr. 43 ſcr. 20 ſec minus ſuo complemento quæ eſt inſcripta 177 gr. 26 ſcr. 40 ſec. namque ſi inſcriptam 178 gr. 43 ſcr. 20 ſec. quadres, quadratumque per radium dividas, à quoto totam diametrum deducas, reliquus numerus 1999502666864 erit inſcripta 177 gr. 26 ſcr. 40 ſec. atque ita deinceps continuando devenies ad inſcriptam 98 gr. 13 ſcr. 20 ſec. 1511960851764: atque id eſt complementum datæ peripheriæ 81 gr. 46 ſcr. 40 ſec. unde ipſa quoque datur 130918844302 ſed ipſas inſcriptas inventas cum ſuis peripherijs hic ſubjicio.

peripheria			*inſcripta.*
0 gr. 38 ſcr. 20 ſec.			11150656894.
179 gr. 21 ſcr. 40 ſec.			1999968915472.
178.	43.	20.	1999875662854.
177	26	40.	1999502666870.
174	53	20.	1998010914802.
169	46	40.	1992047615642.
159	33	20.	1968253702942.
139	6	40	1874022639094.
98	13	20.	1511960851778.
81	46	40.	1309188444302.

Atque ita inventa eſt optatæ peripheriæ inſcripta ad taxationem diametri præſcriptam. quantarum enim diameter eſt 200000,00000, tantarum eſt inſcripta bene accurate vera 130918,84443. Certe ſi diameter aſſumatur partium

tium 20000,00000,00000 inſcripta 81 gr. 46 ſcr. 40 ſec. ſubtenſa major eſt quam 13091, 88444,33140. minor autem quam 13091,88444,33141. vides itaque ob multiplicem operis varietatem diametro duabus notis auctiore opus fuiſſe quam initio proponebatur, ne ultimarum notarum lubricitas etiam in notam ultimam proſerperet. ſi longius etiam iſta biſectio continuanda eſſet, vt puta vicies tricieſve, tres utique notæ omnino ſatis forent. vides itaque cuicunque peripheriæ inſcriptam debitam hac via exhiberi poſſe, idque ſecundum imperatam diametri taxationem.

Quamobrem ad ſinum data peripheria debitum inveniendum absque ullo canonum triangularium ſubſidio compendium ultiſſimum hinc derivari poſſit.

Cum è demonſtratis jam toties citatis liqueat à latere inſcripti trigintanguli peripheriam recta intercepta ita proximè adæquari, ut non una centies milleſima radij parte peccetur. ſequitur ſi iy *vel* iu *ſtatuatur graduum 6, aut etiam pauciorum, ſemper in iſtis ut minimum in* 100000 *radij particulis verum numerum addici. cujus rei nobis exemplum tale eſto. poſtuletur ſinus graduum 5. principio 5 graduum peripheria in partibus diametri* 2000000 *valet* 87266 *ut proximè. aſſumpſi autem diametrum una nota majorem, quam initio imperabatur, ne extrema nota lubricitas in antecedentes quoque redundaret. igitur ut ante factitavimus, in expoſito initio diagrammate, ſit* ui *recta æqualis peripheriæ quinque graduum, atque ideo partium* 87266. *& cum* ai *ſit tripla radij dabitur tota* au 3001268. *atque inde proportio, ut* au *ad* ui, *ita* ae 2000000 *ad perpendicularem* er 58152. *huius quadratum ab* ae *quadrato deductum dabit nobis rectam* ar 1999154; *& idem de* ey *quadrato deductum exhibebit* yr *rectam* 998307: *unde tota* ay *conflatur* 2997462.

Tumque ad extremum fiat, quemadmodum ae 2000000 *ad* er 58152, *ita* ay 2997462 *ad* ys 87154 *ſinum optatum, qui competit*

petit peripheriæ graduum 5. certe poſita diametro 10000000 *datur ejuſdem ſinus è tabulis* 871557. *vides itaque nihil à nobis commiſſum ad taxationem radij quinque notarum.*

Si forte ſinus majoris peripheriæ quæratur opus erit eius biſectione, ut exemplo antecedente fuit exhibitum. verbi gratia detur peripheria 21 *gr. cujus ſinus quæratur ad radium* 100000, *itaque aſſumatur primum peripheria* 10 gr. 30 *ſcr. tum* 5 *gr.* 15. *ſcr. & hujus ſinus quæratur. inde illorum, opere retrogado. Sed cum hoc quoque haud parum moleſtiæ & difficultatis habeat, aliam excogivimus viam, quæ uſque ad* 22 *gr.* 30 *ſcr. primo impetu hos ſinus legittimos exhibeat, neque ulla biſectione utatur. unica igitur biſectione, aut complementorum inveſtigatione ad radium* 100000, *omnes ſinus bene accurate deciduntur. Atque illud epicherema peculiari theoremate, quod hunc librum claudit, complexi ſumus. atque iſta de ſinuum inveſtigatione nunc dicta ſufficiant.*

Poterunt autem ordinatarum quoque omnium figurarum latera hoc modo tuto & conſtanter hinc definiri ad optatam diametri taxationem: quam diu enim ut minimum in notis inventis non percetur propoſitione 32 & eiuſdem conſectario fuit definitum, itaque cum terminus hoc modo inventus ſemper ſit proxime minor, ſequitur utique ſi illum locum unitate augeam mihi dari neceſſario terminum proximè majorem: quemadmodum tot exemplorum inductione illic jam patuit. Atque ita vitatis intricatiſſimarum æquationum ſcopulis, & earundem, ἀμφιϐολίαις licet nobis accuratè & ſecure, inſcriptam & peripheriam ſuam reciproce invenire, Quam enim pertentoſus labor (ut triſectionem & quintuſectionem nunc omittam) ex peripheriæ in ſeptem, undecim, tredecim alijſque primorum numerorum ſectionibus exiſtat, ijs qui huic labori pertinacius affixi hæſerunt haud ignotum eſſe poteſt. Et cum jam exemplorum abunde ſit, duntaxat aliquot polygorum la-

tera immani labore à noſtro Ludolpho inveſtigata hic adſcribam. tu ſi libet eadem ſecundum poſita præcepta quoque indigato.

Latera polygonorum inſcriptorum quantarum diameter erit 20000,00000,00000.

Polygona.		Polygona.	
3	17320508075688 7	42	14946018717284
4	14142135623730 9	43	14599062932181
5	11755705045849 4	44	14267836639846
6	10000000000000 0	45	13951294748825
7	8677674782351 1	46	13648482672934
8	7653668647301 7	47	13358526749024
9	6840402866513 3	48	13080625846028
10	6180339887498 9	49	12814043996142
11	5634651136828 5	50	12558103905862
12	5176380902050 4	51	12312181226788
13	4786313285751 1	52	12075699484457
14	4450418679126 2	53	11848125578742
15	4158233816355 1	54	11628965785095
16	3901806440322 5	55	11417762161551
17	3674990356331 4	56	11214089447438
18	3472963553338 6	57	11017552071173
19	3291891805614 6	58	10827781717083
20	3128689300804 6	59	10644434968435
21	2980845323523 4	60	10467191248588
22	2846296765465 7	61	10295750954069
23	2723332981924 9	62	10129833767742
24	2610523844401 0	63	9969177132139
25	2506664671286 0	64	9813534865483
26	2410733605106 4	65	9662759051014
27	2321858285046 0	66	9516383164748
28	2239289522066 1	67	9374452493988
29	2162380368478 8	68	9236691729147
30	2090569265353 0	69	9102919826592
31	2023366439748 6	70	8972966970063
32	1960342806591 2	71	8846669345075

33 \| 190

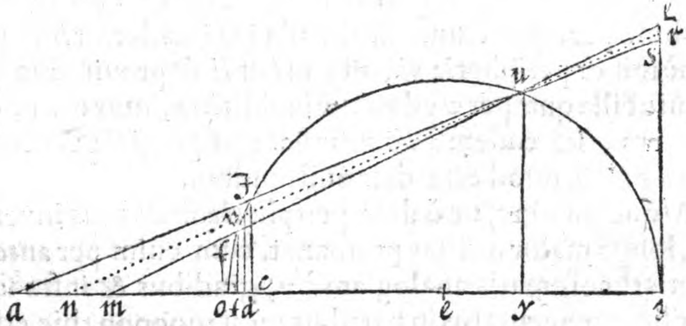
33	19011208660836	72	8723877473067
34	18453671892660	73	8604446600906
35	17927861780608	74	8488240639229
36	17431148549531	75	8375130745839
37	16961184895101	76	8264994849762
38	16515869094466	77	8157717212317
39	16093313743545	78	8053188021883
40	15691819145568	79	7951303019385
41	15309850567299	80	7851963151813
		81	7755074251363

Ad extremum aliquid hactenus poſitis accuratius hic quoque tentare libet & huic negotio finem imponam.

PROPOSITIO XXXIX.

Si trienti datæ peripheriæ ſinus æqualis ultra centrum conſtituatur, recta utriuſque verticem connectens & continuata occurret diametro continuatæ intra limitem triſectionis & diametri continuationem radio æqualem.

SIt ſemicirculus *iuo* cujus diameter *io* continuetur in *a* radio æqualiter, & aſſumatur peripheria *iu*, cujus ſinus



ſit *uy*, rectaque *um* ita ſit educta ut *mf* radio æquatur. itaque *m* punctum per propoſitionem 25 erit limes triſectionis

nis peripheriæ datæ *uy*, & *fo* peripheriæ ejuſdem triens: porrò recta ab *a* puncto ad *u* connexa abſumet *jfo* peripheriam majorem triente *ui* per propoſitionem 22. eademque cum *il* tangente concurrat in *s*; ſi igitur ad *o* quoque tangens alia excitetur donec *aj* interſecet, ea æqualis erit trienti *ir*; eſt enim *ao* triens totius *ai*. cumque *ir* proxime ſecundum definitos nobis limites æquetur peripheriæ interceptæ *ui*, ſequitur *cj* ſinum in iiſdem terminis majorem eſſe triente peripheriæ *ui*; atque ideò ſi aſſumatur peripheriæ *ui*, vel ipſius *ri* triens, ille major erit ſinu *tf*, minor autem ſinu *jc*; ea igitur nobis eſto *vd*. cujus vertex *v* inter *f* & *j* intercidat. quare recta ab *u* per *v* educta in *n* inter *a* & *m* limites intercidet.

itaque

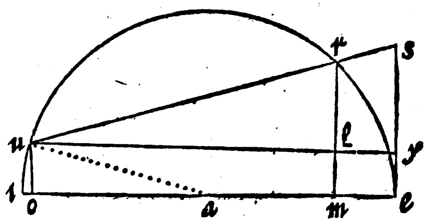
Si trienti datæ peripheriæ ſinus æqualis ultra centrum conſtituatur, recta tangenti in datæ peripheriæ termino occurrens abſumet lineam majorem illa quæ rectæ à termino radii continuati, minorem verò ea quæ recta à limite triſectionis educta intercipitur.

Res ex antecedente demonſtratione plana eſt. ſit enim *oa* continuatio radio æqualis, & *m* ſit limes triſectionis, rectæ hinc per *u* punctum eductæ, illa in *s* incidet, ut *ir* ſit proximè minor peripheria *ui*, iſta in *l* ut *il* ſit proximè major: atqui ut illa quæ per *v* educitur incidit in *n*, inter utrumque limitem, ita eadem *nu* continuata tangenti *il* occurret in *r*, inter *l* & *s*. quod erat demonſtrandum.

Atque ita hinc, ut è data peripheria ſinus ejus inveniatur, longe major utilitas promanat. cum enim per antecedentis theorematis analogiam à $7\frac{1}{2}$ gradibus & infra ſinus exhibeatur accuratus in partibus radii 1000000, hic etiam eadem veritas & ἀκρίβεια inde à decimo quinto gradu exiſtet.

Quin

Quin adeo, quod majus eſt, jam inde à ſinu 30 graduum in partibus radii 10000 non integra particula verum excedit. Sed utriuſque generis exempla proponantur. Sit *ae* radius 1000000, & peripheria 30 gr. pars iſta ad diametri taxationem revocata erit particularum 523598, cui æqualis ſit recta *es*, hujus triens 174532 ut proximè, inter hujus & radii quadratum differentia 969538580976, cujus latus 984651 erit ipſa *ao* ſinus complementi. jam quadratum ab *oe* tota 1984651 & *ys* $\frac{2}{3}$ ipſius *es* dabit quadratum *us*, & inde ipſam *us* longitudine 2017346. Sed compendio utrumque quadratum *oe* & *ys* inveniri poteſt, quadratum enim *ao* additum ad



quadratum radii *ae* plus duobus rectangulis *oa* in *ae* dabit quadratum ab *oe*, præterea cum *ys* dupla ſit *uo* quadratum illud hujus erit quadruplum. & quadratum ab *es* quadrati ab *uo* noncuplum.

Hinc *es* tangentis quadrato per totam *us* diviſio quotus erit *rs* 135897; unde reliqua inſcripta *ur* datur 1881449. Atque inde, & ob ſimilitudinem triangulorum *usy url*, ut *us* 2017346 ad *sy* 349065, ita *ur* 1881449 ad *rl* 325550, quæ ad *lm* trientem *es* addita dabit totam *rm* 500082 ſinum 30 graduum, quantarum radius 1000000. vides itaque hic poſito radio partium 10000 ſinum fore 5000$\frac{82}{100}$, ut non una decies milleſima radii à vero abeamus diverſi. Quamobrem ſi quando hoc ſatis ſit ad trigeſimum gradum hæc via conſtans erit, & ſi complementa hinc inquiras, etiam ſupra ſexageſimum. ut in gradibus intermediis tantum unica peripheriæ ſubdiviſione opus ſit. quemadmodum præmiſſo theoremate explicavi.

Digitized by Google

Secundo ſit in eodem diagrammate *er* peripheria 15 graduum, cujus ſinus quæratur in partibus radii 1000, 00000. Erit itaque *es* pars peripheriæ quarta & viceſima earundem 26179938. & *ye* vel *uo* ſinus hujus triens 8726646, unde ſinus complementi *oa* datur 99618500. hinc è quadrato *uy* & *ys* quadrato dabitur longitudine *us* 200380046; deinde quadrato tangentis *es*, quod noncuplum eſt quadrati *ou*, per *us* diviſo dabitur ſegmentum exterius *rs* 3420446. unde inſcripta *ur* datur 196959600. Atque hinc proportio: quemadmodum *us* 200380046 ad *sy* (beſſem totius *es*) 17453292; ita *ur* inſcripta 196959600, ad rectam *rl* 17155368, quæ ad *ml* addita nobis dabit totam *mr* 25882014 ſinum 15 graduum. atqui è tabulis idem ſinus datur 25881904; ut in partibus radii 1000000 vix unica unitate verum ſinum excedat, in minoribus etiam minus.

Si *es* vel *er* peripheriam, totius circuli partem ſextamdecimam ſtatuas, qui ſunt gradus 22½. jam vel hinc uſque in partibus radii 100000, ne quidem unicam unitatem aberrari certum quoque eſt. Quamobrem ſi in peripheriis majoribus quam 45 gr. complementa quoque adhibeantur, unica biſectione ſinum optatum ad quinque notas uſque adſequeris. Quod utique notaviſſe fuerat operæ pretium.

Vides itaque ſinum *rm* hoc modo inventum majorem eſſe quam illle qui competat poſitæ peripheriæ: atque ideo peripheriam *re* majorem quoque eſſe quam illam, quæ ſit propoſita. quare peripheria *er* pauxillo aliquo major eſt, quam ſit *es*, contingentis interſegmentum. nam & illud quoque monere haud abs re eſſe exiſtimavi. Atque hic tandem Cyclometricorum elementorum finis eſto.

FINIS.

Digitized by Google

AD V. CL.

WILLEBRORDVM SNELLIVM ejuſque Cyclometriam.

TV circinoque circuloque præpotens
Verſator artis Archimedeæ, facis
Quæ nullus ante prodidiſſe noſcitur:
Stagira quondam quem Lyceo tradidit
Quæſivit iſta, ſeduloque hæc egerat,
Dum curva quadris quadra mutat orbibus;
Sed hic quid arte poſſit aut induſtria
Vel mente docta calculoque perfici
Quæſivit ille, præſtitit ſed SNELLIVS.

IOH. ISACIVS PONTANVS.

Digitized by Google

Digitized by Google

APPENDICVLA,

ET

CYCLOMETRICES VSVS.

VIdebar jam munere meo defunctus, & ſatis oportunè omnia explicuiſſe; non ignarus induſtrium lectorem multa hinc cum ad numerorum logiſticam, tum etiam ad Geometricam factionem poſſe traducere; neque ideo neceſſe exiſtimabam iſta pluribus verboſe inculcare: ſed aliorum judicio & petitioni mihi hic quoque fuit obſecundandum, maximè voluntati viri Nobiliſſimi D. Ioannis à Mathenes Domini in Opmeer, qui mirifice harum artium cognitione afficitur: neque quidquam adeò reconditum in iſtis exiſtimat, quod non ſummam voluptatem cum pari utilitate habeat conjunctam. Is igitur ita judicabat, cum etiam alia theoremata his noſtris eſſent permixta, quæ ad conſequentium πίςωσιν & demonſtrationem adhiberentur; ad uſum autem ex ipſa cyclometria derivandum non eſſent neceſſaria: haud male me operam collocaturum, ſi, quemadmodum iſta noſtra cyclometria illis neglectis ad praxin traduci poſſet, quaſi digito intento demonſtrarem: ut ſimul, quidnam noſtro labore & induſtria præſtitum eſſet tanto planius liqueret. Et, ut ingenuè fatear, ludum hunc ludere mihi quoque volupe fuit. Neque tamen omnia

ſelegi quæ hinc exprimi poterant; ſed pauculis iſtis contentus, plura tibi noſtro exemplo tuo uſui derivanda reliqui, cujus generis ſunt iſta.

Datis quotcunque etiam diverſorum circulorum ſectoribus, ſectionibus, triangulis, geometrica factione integrum circulum, vel circuli partem definitam ijs æqualem exhibere.

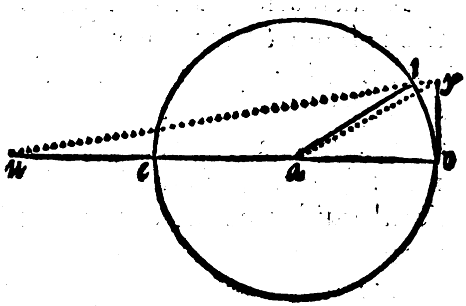
Data ratione peripheriæ ad ſuam ſubtenſam (cum ea non major erit radio circuli) & peripheriam & ſubtenſam invenire.

Atque alia hujus generis infinita, quæ hinc facillime & expeditiſſime derivari poſſunt. Tu itaque, benigne lector, ſi quid hic ſit quod te quoque oblectet, illi imputato, cujus impulſu hoc auctariolum, tanquam mantiſſa operi cyclometrico acceſſit.

I. PROBLEMA.

Triangulum dato ſectori æquale conſtruere. & contra.

DAtus eſto ſector *aoi*, & per cyclometrici propoſitionẽ 34 fiat *oy* tangens peripheriæ *oi* æqualis. & ſi *oi* ſit $\frac{1}{12}$ totius, jam ejus quantitas in tangente expreſſa erit iis terminis, quæ eſt diametri peripheriam 100 ad 314. ſi in iſtis artionem æqualitatem poſtules biſectur *io*, & ſecundum leges



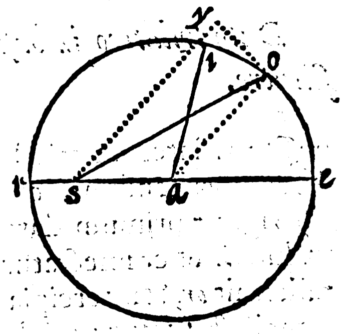
poſitas

poſitas reliqua peragantur. Iam in ratione 10000 ad 314-15 nihil erraveris: atque ideo ſi majuſculus detur ſector ſecundum has leges peripheria biſecari & recta eidem poterit conſtitui æqualis, quemadmodum operi propoſito erit opottunum. Contra autem, ut dato triangulo ſector æqualis conſtituatur; fiat triangulũ dato æquale, cujus unum crus ſit æquale dati circuli radio, & cruri reliquo peripheria æqualis ſtatuatur per propoſitionem 34.

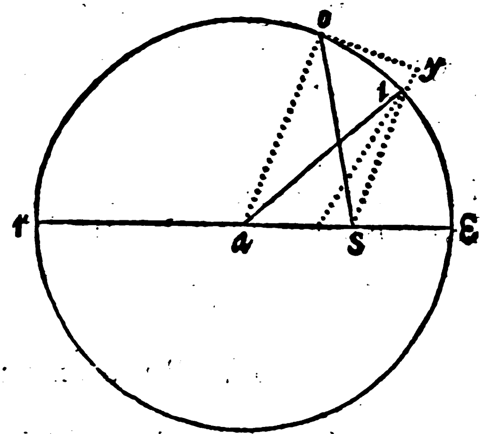
II. PROBLEMA.

Dato ſectori ſuper data peripheria æquale trilaterum conſtruere.

OPortet autem ſectorem datum non eſſe minorem ſectione à data peripheria & ejus inſcripta comprehenſâ. Exponatur ſector *iae* & detur peripheria *oe*, major an minor data nihil intereſt, conſtituatur igitur per propoſitionem antecedentem triangulum *ayo* æquale ſectori *iao*. & per verticem perpendicularis *y* parallela contra *ao* radium ſecet *ae* diametrum in *s*: recta *so* connexa comprehendet trilaterum *ose* dato ſectori *iae* æquale: namque *aoi* ſector triangulo *aos* æqualis additus demptuſve (prout *o* punctum datum extra aut intra baſin dati ſectoris erit ſitum) conſtituet trilaterum *ose* dato *iae* æquale. Et quidem tam proxime quam



 circuli



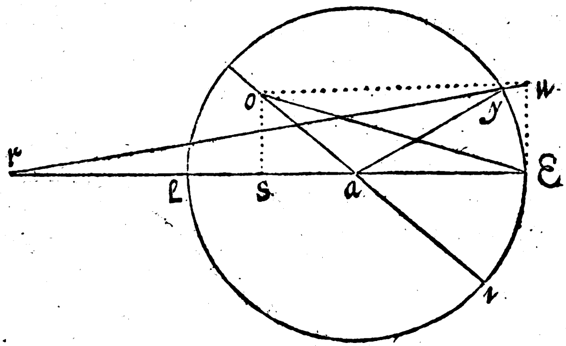
circuli amplitudo id ſinet. ut propoſitione ſuperiore expreſſum fuit. Hæc altera eſt mechanice, quam ita geometrice ab ulla alia quadratione fruſtra expoſtules. Nam helicum ratio omnino & moroſa, & ob ſuæ delineationis perpetuos amfractus ad hujuſmodi explicationes inepta eſt. ut hic rem longe ante perfectam habeas, quam illi ſuam helicen adornent & exprimant.

III. PROBLEMA.

Dato trilatero in baſi circulari æqualem ſectorem conſtituere.

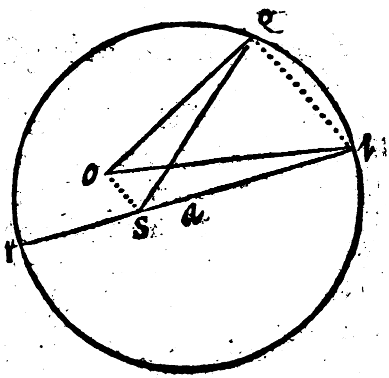
ESto trilaterum *eoi* à baſi circulari & rectis duabus *eo oi* comprehenſum, cui ſector æqualis ſit exhibendus; Eſto igitur primum datarum altera ſegmentum diametri, ut hic *oi*. & connectatur radius *ae*, cui per punctum *o* parallela ſit *or*, & intercipiat ſegmentum tangentis *ue*, huic *ue* æqualis ſtatuatur peripheria *ye*. nam recta ab *u* ad *r* diametrum radio continuatam connexa abſumet peripheriam *ye* æqualem datæ rectæ *ue*. per cyclometrici propoſitionem.

34 Ajo



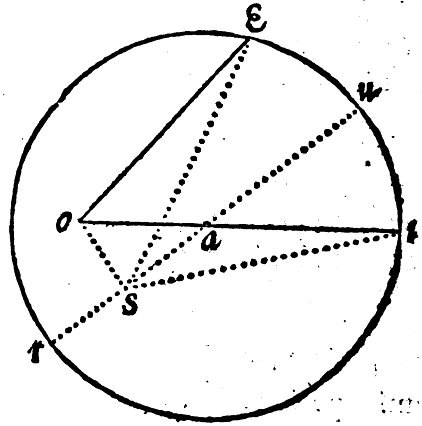
34 Ajo *yai* ſectorem æquari trilatero dato *eoi*. Nam *eai* ſector communis eſt utrique, & *oea* *eua* triangula æque alta & in eadem baſi æqualia ſunt, triangulumque *eua* ſectori *yae* per propoſitionem hanc primam. totus igitur ſector *yai* toti trilatero *eoi* pariter æquabitur. Si *ue* recta major fuiſſet duodecima peripheriæ parte, aut etiam medio radio, potuit ejus ſemiſſi peripheria æquari, eademque duplicata toti. aut pro illa accurata diligentia, quam in hoc opere exiges. Idem de ſequentibus quoque dictum intelligatur.

Secundo ſi neutra rectarum *oe oi* per centrum tranſeat, ut hic. ſit igitur ab termino *i* recta *ia* per centrum, & contra baſi inſcriptam *ei* parallela per *o* verticem educta ſecet diametrum in *s*, tum rectæ connexæ *es si* comprehendent ſpatium *esi* dato *oei* æquale: quia *esi eoi* triangula æquealta in eandem baſin inſiſtunt.



Aut ſi malis & accuratius omnia velis exſequi uno

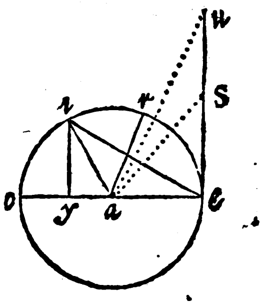
impetu biſecetur *ei* peripheria in *u* & ſit diameter *ur*. tumque *eoi* trilaterum revocetur ad trilaterem *esi*. cum igitur *esu isu* ſint æqualia ſegmenta, ob laterum & peripheriarum in quas inſiſtunt æqualitatem, ſector uni eorum æquatus erit dimidia pars trilateri *eoi*. Eodem modo potuit dimidio *esu* ſector æqualis conſtitui, cujus quadruplum dato trilatero pariter æquaretur. Sed iſtud opus conſectaberis pro ea quam poſtulas ἀκρίβεια ita enim non τοσοῦτον partem in hoc circulo, imò eo etiam adhuc minus, peccabitur.



IV. PROBLEMA.

Datæ ſectioni æqualem ſectorem conſtituere.

DEtur ſectio circuli ab *ei* recta & peripheria *eri* comprehenſa, cui ſector quæratur æqualis. ſtatuatur itaque peripheriæ *eri* æqualis recta *eu*, ſeu tota ſimul, ſive per partes, per cyclomet. propoſitionem 34, & ſit diameter *eo* in quam ab *i* demittatur perpendicularis *iy*, cui ab *ue* auferatur æqualis *us*, & reliquæ *es* per eandem propoſitionem ſtatuatur *er* peripheria æqualis. Ajo ſectorem *rae* datæ ſectioni *ier* æqualem eſſe. Namq; area totius ſectoris *iae* æquatur triangulo, cujus baſis peripheria, altitudo ſit radius,

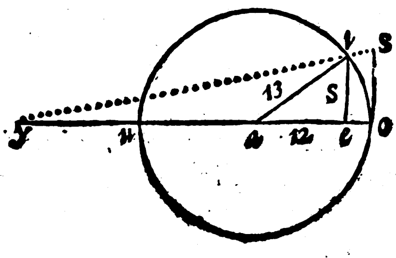


dius, per ea quæ ad Cyclomet. prop. 19. nobis dicta ſunt: triangulum autem *eia* æquatur triangulo cujus baſis ſit perpendicularis *iy* & altitudo itidem radius *ae*. ſi igitur à triangulo *uae* tollatur triangulum *uas*, reliquum triangulum *sae* ſectioni *eir* erit æquale. & cum peripheria *er* rectæ *se* ſit poſita æqualis, triangulum quoq; *sae* æquabitur ſectori *rae*. quod erat faciendum. vides itaque ſolo linearum ductu quoque tam prope hic ad verum haud difficulter accedi, quam cuique erit oportunum.

V. PROBLEMA.

Datis trianguli rectanguli lateribus ejus angulos invenire.

SIt triangulum rectangulum *aei*, cujus latera *ai* 13 *ae* 12. *ei* 5. hujus angulorum amplitudo ſi duntaxat quæratur in ſcrupulis primis facilem & promptam habebit explicationem. namque centro *a* intervallo *ai* circulus deſcribatur, & *ou* dimeter radio æqualiter continuetur in *y* recta *yis* continuata abſumet *os* tangentem, æqualem peripheriæ *oi* ut proxime, per propo-



ſitionem

ſitionem cyclometr. 38. Sed ut ea peripheria faciliorem habeat explicationem, & ad gradus ac ſcrupula ſua reductionem per canonion propoſit. 36. pag. 70. poſitum, aſſumam radium partium 10000000; & fiat ut *ye* 38 ad *ei* 5, ita *ao* radij triplum 30000000 ad *os* 3947368 in iiſdem radii partibus. quæ per dictum canonion reſpondent 22 gr. 37 ſcr. formulam ſemel omnino hic exprimam ne ſit neceſſe ſæpius eandem in ſequentibus iterare. hoc modo erit.

3947368	
3490658	20 gr.
456710	
349066	2 gr.
107644	
87266	30 ſcr.
20378	
20362	7 ſcr.
16	

itaque amplitudo anguli *eai* iſta eſt quam dixi 22 gr. 37 ſcr. quæ per tabulas ſinuum ſeptem nontarum etiam ſcrupuloſiſſimè ſcrutanti invenitur 22 gr. 37. ſcr. 11½ ſec. ut non abſis ab iſta ſcrupuloſa inveſtigatione unius ſcrupuli primi parte quinta. quæ differentia perquam exigua eſt, & omnino contemnenda. atque hinc jam acutus reliquus dabitur ſatis accuratè 67 gr. 23 ſcr. Quin adeo ſi vel unum ut proxime minutum etiam negligi poſſit, jam è triangulo rectangulo cujus latera erunt 3. 4. 5. acutus minimo cruri oppoſitus dabitur 36 gr. 50. ſcr. cum verus angulus vix ſit 36 gr. 52 ſcr. ut hic primo impetu vix primis duobus ſcrupulis à vera quantitate abſis. neq; adeò hoc ideò adfero, quod exiſtimem iſta ad uſum ita adhiberi oportere, cum integris ſcrupulis à vero abibitur: ſed tantum ut terminos rationis minimos exprimam, ſecundum quos quam prope ad verum accedatur æſtimari poſſit.

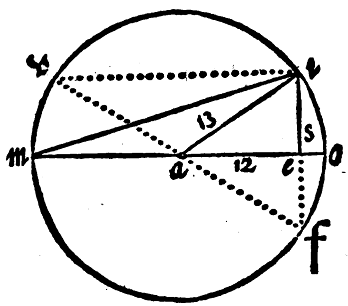
Tertium etiam exemplum huc libet aggregare, ubi primo impetu differentia noſtra à tabulis etiam vaſtiſſimis non ſit duorum ſecundorum ſcrupulorum, ut in iſto. ſi latera trianguli rectanguli aſſumantur 25. 24. 7. Hic itaque

ſi fiat

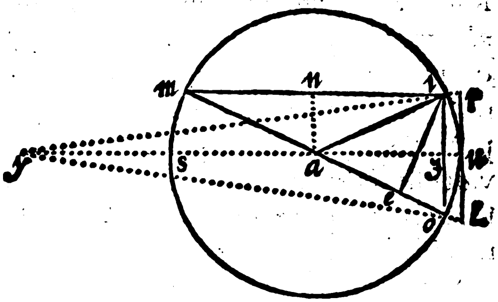
Digitized by Google

ſi fiat ut in antecedentibus, *quemadmodum duplum baſis plus crure majore* 74 *ad crus minus* 7; *ita triplum radij* 3000-0000 *ad* 2837838 *peripheriam huic angulo ſecundum expoſitum radium congruam.* atque hinc per canonion pagina 70 expreſſum dabuntur 16 gr. 15 ſc. 36. ſec. cum è tabilis ſinuum vaſtiſſimis hinc tantum exprimas 16 gr. 15 ſcr. 36$\frac{1}{4}$ ſc. ut differentia utique non ſit unius ſcrupuli ſecundi, quos terminos ideò notaviſſe quoque ſit operæ pretium.

Sin verò prima aggreſſio, quemadmodum è terminis expoſitis liquere poteſt tibi omnino non ſatisfaciat, utendum erit peripheriarum biſectarum inſcriptis & earundem complementis, ſecundum leges prima & ſecunda propoſitione expoſitas. ſed exemplo res erit illuſtrior. ſit *aei* triangulum datum cujus latera *ai* 13, *ae* 12, *ei* 5. hic primum centro *a* intervallo baſis *ai* deſcribatur circulus, & ſit diameter *om*; jam per propoſitionem ſecundam, inveniatur inſcripta *vo* ſeu *mi*; (namq; ſi *vi* 24 quæ dupla eſt *ae* lateris 12,) addatur ad diametrum *mo* 26 totus 50 per radium *am* 13 multiplicatus exhibebit factum 650, æqualem quadrato inſcriptæ quæ peripheriam *vi* & *io*, hoc eſt *vo* ſimul ſubtendit, nempe *mi*, atq; inde ipſa *mi* dabitur 25 $\frac{49}{100}$ [illegible], hoc primum. Tumque *vi* 24 de *vf* ſubducta relinquet 2, quæ per radium 13 multiplicata dabunt 26 pro quadrato inſcriptæ *io* per propoſit. primam, unde ipſa dabitur 5 $\frac{9902}{100000}$ partium. Iam rurſum in hoc altero diagrammate *aei* eſto rectangulum triangulum eadem laterum quantitate; & biſecetur peripheria *oi* in *u*, & continuetur *us* diameter ra-



dio æqualiter in *y*. cum igitur *aj* perpendicularis ſit dimidia inſcriptæ *mi*, ea quoque dabitur earundem partium $12\frac{74754}{1000000}$. hinc itaque fiat, ut prius, quemadmodũ



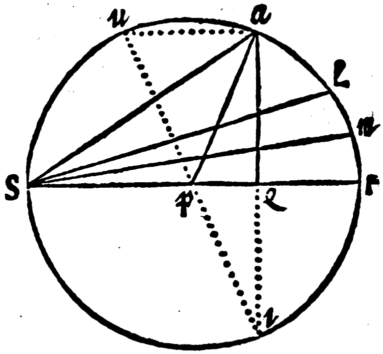
diameter plus *aj* $\frac{3874754}{1000000}$ ad $\frac{509902}{1000000}$, ita *yu* 3000000 in partibus radij ad 394788 peripheriam quæſitam in partibus radij 1000000, inde ex canonio ante citato peripheria eadem dabitur 22 gr. 37. ſcr. 5. ſec.

At ſi hanc biſectionem adhuc ſemel continues invenies pro inſcripta majore $25\frac{87346}{1000000}$ & pro minore $2\frac{56200}{1000000}$. atque hinc proportio, ut diameter plus ſemiſſe majoris inſcriptæ $\frac{3893673}{1000000}$ ad minorem $\frac{256200}{1000000}$, ita radij triplum 3000000 ad peripheriam congruam 197397, quæ ſubtendit dimidium angulum datum in partibus radij 1000000; cujus duplum 394794, unde per canonion πρόχειρον paginæ 70 dabuntur 22 gr. 37 ſcr. 12 ſec. tantillo hic modus accuratior eſt antecedente.

Sed huius veritatem etiam alterius anguli quantitate inveſtigata libet explorare. ſit igitur etiam in iſto diagrammate perpendicularis *ae* 12, alterum recti crus *pe* 5, *ap* 13, & quærenda ſit amplitudo anguli acuti *epa*. inveniatur igitur ante recta *sa* $21\frac{63331}{1000000}$, & biſetur pheripheria *ar* in *l*, & inveniatur inſcripta *sl* $24\frac{88439}{1000000}$, & eodem modo recta *sm* $25\frac{71978}{1000000}$, biſecans peripheriam *lr* in *m*. ex *sl* autem per primam cyclometr. propoſitionem dabitur inſcripta *mr* $3\frac{80827}{1000000}$. Atque hinc tandem proportio quemadmodum diameter 26 plus dimidia inſcripta *sm* $12\frac{85979}{1000000}$ hoc eſt

$38\frac{85979}{1000000}$

$38\frac{81979}{100000}$ ad *mr* $3\frac{80827}{100000}$, ita tres radij 30000000 ad peripheriam *mr* 2940007 in iiſdem iſtis radii partibus, cujus quadruplum pro tota peripheria *ar* 11760028, cui ex dicto canonio reſpondent 67 gr. 22 ſcr. 48 ſec. pro angulo *aie.* atqui angulus alter *iae* ante inventus fuerat 22 gr. 37 ſcr. 12 ſec.



vides itaque accuratum utriuſque partis conſenſum ne quidem in ipſis ſecundis deſiderari. certè ſi unicam duntaxat biſectionē utrobiq; & hic & illic ultra continuare collibitum fuiſſet, omnium canonum quantumvis accuratiſſimam diligentiam nos non tantum in ipſis tertiis æquare verum etiam ſuperare potuiſſe manifeſtum eſt. Vt iſtam laudem jure meritiſſimo noſter cyclometricus tanquam propriam ſibi vendicet.

VI. PROBLEMA.

Datis trianguli rectanguli angulis oppoſitorum laterum rationem invenire.

ID ſatis clarè propoſitione 38, & accuratius adhuc propoſitione 39 à nobis fuit propoſitum. itaque eo nobis ablegandus es, ut nihil videatur hoc quidem in genere excogitari potuiſſe planius, atque adeò facilius. tuum igitur erit (lector benevole) iſta legendo & meditando tibi efficere utilia. & quemadmodum in his non ignobilem

 noſtri

noſtri cyclometrici uſum commonſtravi, ita eundem verſando, & in aliis ad hoc exemplar exercendo illuſtriorem efficere. his igitur quod in commodum tuum vertat fruere, & bene vale.

ET literis doctorum, & libris jam publicatis ad me relatum eſt Archimedis demonſtrationem, qua circuli peripheriam intra inſcripti & circumſcripti polygoni perimetrum concludit, tanquam bene geometricam, viris in hoc docto erudito pulvere accurate verſatis probari quidem; ſed eoſdem tamen moveri, minus ſolidis argumentis, ut in eiuſdem numerorum ratiocinio neſcio quid deſiderent, quod lateris quadrati inveſtigatio in numeris non quadratis ſemper ſit imperfecta: atque ideo ex iſtis erroribus, qui in ſingulis quidem negligendi & parvi videantur momenti, ad extremum tamen multiplici extractionũ labyrintho ſummulam conflari haud aſpernandam. Hanc nempe igitur unam ob cauſam iſtos limites ab ipſo præſtitutos tanquam minus certos in dubium vocant; quod ipſum quoque haud dubio longe maximum momentum habere exiſtimant, cum numeri irrationales & ἄῤῥητοι, quibus polygonorum adſcriptorum latera explicantur, ad explicabiles per ſuas decimas centeſimas aut milleſimas revocantur. Sed iſtam ſollicitudinem ipſorum animis eximere debuit Triangularis canonis conſtuctio, quo iidem adeò ſecurè utuntur. Nam cum non ſint neſcii Regiomontanum primum eam per tot numerorum ambages circumductam ad novem notas initio conſtruxiſſe, & noviſſimos duos characteres ob lubricitatem & incertitudinem duntaxat detriviſſe: hunc tamen canonem tanquam lydium

lydium lapidem, & arbitrum nunquam fallacem ad quæſiti ignorati ſolutionem adhibent. Quamobrem vel iſtinc ipſis polygonum quodvis licuit excerpere, & cum iſta ſurdorum numerorum analyſi comparare; &, ſi numeri utrique ſemper inter ſe congruant, profecto jam de analyſeos veritate amplius dubitare fas non erat.

Sed libet hanc rem paulo altius arceſſere, & cauſam ipſam plane ac perſpicuè ante oculos ponere. Sit itaque latus ſedecanguli propoſitum $\surd.2 - \surd.2 + \surd 2$, qui numeri ad abſolutos & explicabiles ſint revocandi. Latus ultimi numeri 2 ſi ad 100000000 reducatur erit 141421356 vel $1\frac{41421356}{100000000}$ ut proximè, minus vero; de iſto enim apud peritos & hujus modi gnaros nulla poteſt eſſe dubitatio. In ſuccedente autem, quia hic inventus numerus ſecundum vinculorum leges ad 2 iterum addendus, & rurſum latus hinc eſt inveſtigandum, occaſio dubitationis aliqua ſuboriri videatur, ſumma igitur ex utroque conflata $3\frac{41421356}{100000000}$ ad 100000000 milleſimas quadratas reducta erit 3414213560000000, cujus latus 184775906, vel $1\frac{84775906}{100000000}$ idem omnino erit, cum eo numero, qui exiſteret ſi priorem extractionem ad duplo plures decumas produxiſſes, ut puta $1\frac{41421356237309504}{100000000000000000}$, atque hinc tum è 34142135623730950 latus eruiſſes. Cauſa ea eſt quod his numeris per ſua columbaria diſpunctis $\frac{34\,14\,21\,35\,62\,37\,30\,95\,0}{1\,8\,4\,7\,7}$ $\frac{34\,14\,2}{1\,8\,4\,7\,7}$ 13560000000000 cum utrobique uſque ad quintam ſedem numeri iidem ſint, eoſdem quoque numeros eſſe reliquos ſit neceſſum: atque ideo, cum per ſingulas notas diviſor producatur nullam poſſe diſcrepantiam ſiboriri (ſi forte aliqua exiſtat) ante quam diviſor ad illam ipſam ſedem devenerit, vel demum poſt eam. Adeo ut continuatis extractionibus ea lubricitas & incertitudo poſt quinquageſimam aut ſexageſimam demum extractionem in ultimam

aut penultimam notam, ut ſummum, proſerpere queat. Vt omnino nihil cauſæ ſubſit, cur extractiones iſtas ſagillent aut in dubium vocent. In poſito enim exemplo $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ſinguli numeri ad æſtimationem radij 100000000 reducti valebunt.

$\sqrt{2}$.	141421356.	ſubtenſa	45 gr.
$\sqrt{2+\sqrt{2}}$.	184775906	ſubtenſa	135 gr.
$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.	39018065.	ſubtenſa	22 gr. 30 ſcr.

Id quam arcte cum canonibus Rhetici decem notarum conſentiat, ſi experiri libeat. deprehendes eoſdem planè ex duplicatis dimidiarum peripheriarum ſinibus

141421356	24
184775906	50
39018064	40

vides itaque reliquos quidem congruere, noviſſimum autem $\frac{60}{100}$ unius unitatis tantum abeſſe. cujus cauſa ex ipſa operis exegeſi facile repeti poteſt. nam lubricitas iſta illinc facile liquebit. Quare certum eſt & hic quoque Archimedeos abacos fruſtra in dubium vocari; cum ille etiam minimas particulas ſit conſectatus, quas nos in his majoribus merito negligimus. multa hic ſunt quæ operis factio facilius monebit, quam longis verborum ambagibus explicari queat. Et hæc quidem ad ſecuritatem illorum, qui minus his numeris tractandis aſſueverunt monuiſſe ſufficiat, ut ſimul & hunc illorum animis ſcrupulum eximiam, & noſtro ratiocinio quoque fidem adſtruam.

FINIS.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google